Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille 8 : Matrices.

Exercice 8.1(∗)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B.

Exercice 8.2(∗)

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en calculant le moins possible, que $\mathrm{Ker}\, u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1, 1, 1)$ et $c = (1, 2, 0)$. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v : E \to \mathbf{R}^3$ la restriction de u à E. Expliciter la matrice de v de (b, c) dans (a, b, c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ la restriction de u de E vers E, et écrire la matrice de w dans la base (b, c).

Exercice 8.3(∗)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 8.4

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB et BA. Que remarque-t-on ?

Exercice 8.5

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.
   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 8.6(∗)
Soit m un réel non nul. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ 1/m & 0 & m \\ 1/m^2 & 1/m & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $(1 + I)(A - 2I)$.
2. Soit $B = \frac{1}{3}(A + I)$ et $C = \frac{1}{3}(A - 2I)$. Calculer B^2 et C^2. En déduire une expression simple de B^n et C^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 8.7
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbf{R}^3$ et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 8.8(∗)
Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ vers $\underline{f}$.
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

Exercice 8.9
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 8.10(∗)
Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.