Feuille 6.
Sommes et intersections de sous-espaces vectoriels. Applications linéaires.

Exercice 6.1($*$)
On considère les deux sous-ensembles suivants de $\mathbf{R}^4$

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + 4y - 5z - 2t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ 3x - y + t = 0\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$; on admettra sans le démontrer que F est également un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, puis une base de F.
3. Déterminer une base de $E + F$, puis une base de $E \cap F$.
4. Soit (f_1, f_2, f_3) la base de F déterminée au 2). Expliciter un vecteur f_4 tel que (f_1, f_2, f_3, f_4) soit une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 6.2
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, -1, 1, -1), \quad u_3 = (1, 3, 1, 3),$$

$$u_4 = (1, 2, 0, 2), \quad u_5 = (1, 2, 1, 2), \quad u_6 = (3, 1, 3, 1).$$

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3) et G le sous-espace vectoriel engendré par (u_4, u_5, u_6). Déterminer une base de F, de G, de $F + G$ et de $F \cap G$.

Exercice 6.3
Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u_1 = (2, 3, 0, -1), \quad u_2 = (1, 0, 0, 1), \quad u_3 = (0, 1, 0, 0), \quad u_4 = (1, 2, 2, 1).$$

Soit F le sous-espace engendré par (u_1, u_2) et G le sous-espace engendré par (u_3, u_4). Déterminer les sous-espaces $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 6.4
Soit E un espace vectoriel, et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F + G = F + H, \quad G \subset H.$$

Montrer que $G = H$.

Exercice 6.5($*$)
Quand F et G sont deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbf{R}^6$, tous les deux de dimension 4,

1. Quelle peut-être la dimension de $F + G$?
2. Quelle peut-être la dimension de $F \cap G$?

Exercice 6.6($*$)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 6.7
Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X - a) \text{ divise } P\}$$

pour $a \in \mathbf{R}$. Montrer que si $a \neq b$ il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X-a) + d(X-b)$. En déduire que $E = E_a + E_b$. La somme est-elle directe ?

Exercice 6.8(∗)
Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$.
2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$.
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x, y, z) = xyz$.
4. $f_4 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_4(x, y, z) = (10, 100, 1000)$.
5. $f_5 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
6. $f_6 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, $f_6(x) = (x, 7x, 2x)$.
7. $f_7 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_7(x, y) = (\sin x, \cos y)$.
8. $f_8 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_8(x, y, z) = (y, z, z)$.

Exercice 6.9

1. Déterminer l'ensemble des applications linéaires surjectives de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^6$.
2. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer l'ensemble des applications linéaires injectives de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^3$.

Exercice 6.10(∗)
Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β reéls par

$$f[(\alpha, \beta)] = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.

Exercice 6.11(∗)
Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

   $$f[(\alpha, \beta, \gamma)] = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im} f$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 6.12
Dans chacun des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $g : E \to E$.

1. $E = \mathbf{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, -x + y, 0)$.
2. E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3), et g est l'unique application linéaire qui vérifie $g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = e_1 + e_2$.

Exercice 6.13(∗)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et g un endomorphisme de E tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.

1. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} g$ ne peut être égal ni à 0 ni à 3.
2. Si l'on suppose que $\dim \operatorname{Ker} g = 2$, montrer que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} g^2$, puis que $g^2 = 0$.
3. Conclure que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$.