Feuille 5
Espaces engendrés ; bases ; dimension ; supplémentaires.

Exercice 5.1($*$)
Etant donnés des vecteurs $x_1, \dots, x_k$ de $\mathbf{R}^n$, on note $x_j = (a_{i,j})_{1\le i\le n}$ et on considère la *matrice* associée, c'est-à-dire le tableau à n lignes et k colonnes dont la j-ième colonne, notée C_j, est $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Rappelons que, dans l'algorithme de Gauss (sur les colonnes) on part d'une matrice (disons, avec n lignes et k colonnes, comme ci-dessus) et on applique sucessivement les trois opérations suivantes :

(i) Permuter deux colonnes C_i, C_j.
(ii) Multiplier une colonne C_i par λC_i, pour λ un nombre réel non nul.
(iii) Remplacer une colonne C_i par $C_i + \lambda C_j$, pour λ un nombre réel et $i \neq j$.

Le but de l'algorithme est de mettre la matrice sous forme *échelonnée* (en colonnes), c'est-à-dire :
– Si C_i est une colonne nulle, et $i+1 \le k$, alors C_{i+1} est une colonne nulle.
– Si C_i est une colonne non nulle, et $i+1 \le k$, alors le nombre de coefficients nuls commençant C_{i+1} est strictement plus grand que le nombre de zéros commençant C_i.

Si une famille de vecteurs a une matrice échelonnée, on dira que la famille de vecteurs est échelonnée.

1. Déterminer si les matrices suivantes sont échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 47 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

2. Mettre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix}$ sous forme échelonnée.

3. Etant donnée une famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ dans $\mathbf{R}^n$ de matrice A, l'application d'une des opérations élémentaires à la matrice A nous donne une matrice A', dont les colonnes forment une nouvelle famille de vecteurs $(x'_1, \dots, x'_k)$; montrer que $(x_1, \dots, x_k)$ et $(x'_1, \dots, x'_k)$ engendrent le même espace vectoriel.

4. Comment déterminer la dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs échelonnée ? Expliquer pourquoi l'algorithme de Gauss permet de déterminer la dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs, et d'en donner une base échelonnée.

5. Déterminer une base échelonnée du sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$(1,1,1,1),\ (1,2,3,4),\ (3,1,4,2),\ (10,4,13,7),\ (1,7,8,14) .$$

Donner la dimension de F ; le cas échéant, compléter la base de F obtenue ci-dessus en base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5.2. A l'aide de l'algorithme de Gauss, déterminer l'espace vectoriel engendré par chacune des familles suivantes, et en donner une base.

1. $(1,2,1,0), (-1,1,1,1), (2,-1,0,1), (2,2,2,2)$ dans $\mathbf{R}^4$;
2. $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ dans $\mathbf{R}^3$.
3. $(1,2,1,2,1)$, $(2,1,2,1,2)$, $(1,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$ dans $\mathbf{R}^5$.
4. $(2,1,3,-1,4,-1)$, $(-1,1,-2,2,-3,3)$, $(1,5,0,4,-1,7)$ dans $\mathbf{R}^6$.

Exercice 5.3. On note H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1,2,3,0)$ et $v = (1,0,-1,5)$. Donner une base de H, puis la compléter en une base de $\mathbf{R}^4$.

Exercice 5.4. Soit $u = (1,2,3,4)$ et $v = (1,-2,3,-4)$.

1. Donner un système de 2 équations à 4 inconnues dont l'ensemble des solutions soit égal à $\mathrm{Vect}(u,v)$.

2. Peut-on trouver $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pour que $(x, 1, y, 1) \in \mathrm{Vect}(u, v)$? Pour que $(x, 1, 1, y) \in \mathrm{Vect}(u, v)$?

Exercice 5.5(∗) Dans $\mathbf{R}^3$, déterminer la nature géométrique et une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2y - z = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\}$.
4. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$.
5. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}$.
6. $F_3 = F_1 \cap F_2$.

Exercice 5.6. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x = 2y - z \text{ et } t = x + y + z\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ et en déterminer une base.

Exercice 5.7(∗) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ défini par $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 4y - 5z = 0\}$.

1. Donner une base (a, b) de F.
2. Compléter cette base en une base (a, b, c) de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus \mathbf{R}c$.

Exercice 5.8. Dans $\mathbf{R}^2$, on considère les sous-ensembles

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = -x\} \text{ et } F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = x\}.$$

Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ et que $E \oplus F = \mathbf{R}^2$.

Exercice 5.9(∗) Soit E l'espace vectoriel des suites de réels, et soit $F \subset E$ l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient la relation de récurrence

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de F.
3. Montrer que F est de dimension 2 et que les deux suites de la question précédente en constituent une base.
4. Déterminer toutes les suites (u_n) dans F telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

Exercice 5.10(∗) Dans $\mathbf{R}^4$, on considère les vecteurs $a_1 = (0, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 0)$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (a_1, a_2) et G celui engendré par (a_3, a_4).
Montrer que $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 5.11(∗) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

Exercice 5.12. Dans $\mathbf{R}^4$, on note $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + y + z = 0 \text{ et } x - y + t = 0\}$, F la droite de base $(1, 2, 1, 0)$ et G la droite de base $(0, 0, 1, 1)$. Montrer que $\mathbf{R}^4 = E \oplus F \oplus G$.

Exercice 5.13. Soit E l'ensemble des suites convergentes de nombres réels. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites qui convergent vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Exercice 5.14. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes multiples de P est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme sans racine commune avec P, et tel que $\deg(P) + \deg(Q) = 1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U, V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 5.15. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des applications dérivables de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$. Soit F le sous-ensemble de E formé par les applications f telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H l'ensemble des applications $x \mapsto ax + b$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E et montrer que $F \oplus H = E$.