Feuille 4
Applications linéaires

Exercice 4.1(∗)

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_1(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$.
2. $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_2(x, y, z) = x + y + z$.
3. $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f_3(x, y, z) = xyz$.
4. $f_4 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_4(x, y) = (\sin x, \cos y)$.
5. $f_5 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f_5(x, y, z) = (y, z, z)$.

Exercice 4.2(∗)

Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f(\alpha, \beta) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et préciser sa dimension.
3. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et préciser sa dimension.

Exercice 4.3

Dans $\mathbf{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1, -1), \quad v = (1, -1, 3), \quad w = (3, 3, -5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w).

1. Déterminer une base de F.
2. Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma).$$

   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Préciser le rang de f.
4. A-t-on $\mathbf{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
5. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\operatorname{Im} f$?
6. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \operatorname{Im} f$.

Exercice 4.4

Dans chacun des cas suivants, déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $g : E \to E$.

1. $E = \mathbf{R}^3$, $g(x, y, z) = (x - y, -x + y, 0)$.
2. E est un espace vectoriel de base (e_1, e_2, e_3), et g est l'unique application linéaire qui vérifie $g(e_1) = e_2, g(e_2) = e_3$ et $g(e_3) = e_1 + e_2$.

Exercice 4.5(∗)

Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini pour tout (a, b, c) dans $\mathbf{R}^3$ par

$$u(a, b, c) = (-b + 2c, 2a - 3b + 4c, a - b + c),$$

et soit $v = u + id$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.
3. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} v$?
4. Montrer que pout tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u(x) = -x$. En déduire que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.
6. Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u^3(x) = u(x)$.
7. Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 4.6

Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 4.7

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

3. Dire si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $E = \mathbf{R}^3$ dans les deux cas suivants : $f(x,y,z) = (x-2y+z, x-z, x-2y+z)$; $f(x,y,z) = (2(x+y+z), 0, x+y+z)$.

Exercice 4.8(∗)

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et g un endomorphisme de E tel que $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$.

1. Montrer que ni $\dim \operatorname{Ker} g$ ni $\operatorname{rg} g$ ne sont égaux à 0 ou à 3.
2. Soit $x \in E$ tel que $g^2(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, g(x), g^2(x))$ est une base de E.
3. Déterminer alors $\dim \operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{rg} g$.

Exercice 4.9(∗)

Soit $u : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par $u(P) = (1-X^2)P' + 2XP$.

1. Vérifier que u est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $P_1(X) = (X+1)^2, P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = (X-1)^2$. Vérifier que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$. Exprimer $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$ comme combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3. En déduire la matrice de u dans la base (P_1, P_2, P_3).

Exercice 4.10

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi \colon \mathbf{R}_{2n+1}[X] \to \mathbf{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n)) .$$

1. Montrer que φ est injective.
2. Montrer que pour tout $(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n+2}$, il existe un polynôme P tel que $P(a_i) = x_i$ et $P'(a_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 4.11(∗)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\operatorname{rg}(A)$ et $\operatorname{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau et une base de l'image pour chacune des applications linéaires f_A et f_B qui ont pour matrices respectives A et B dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^3$ ou $\mathbf{R}^4$.

Exercice 4.12

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer, en calculant le moins possible, que $\operatorname{Ker} u$ est une droite, et en donner une base a.
2. On note $b = (1,1,1)$ et $c = (1,2,0)$. Montrer que (a,b,c) est une base de $\mathbf{R}^3$ et expliciter la matrice de u dans cette base.
3. On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ engendré par b et c.
   (a) On note $v : E \to \mathbf{R}^3$ la restriction de u à E. Expliciter la matrice de v de (b,c) dans (a,b,c).
   (b) Montrer que cela a un sens de considérer $w : E \to E$ la restriction de u de E vers E, et écrire la matrice de w dans la base (b,c).

Exercice 4.13(∗)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de E, et écrire la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) vers (f_1, f_2, f_3).
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans (f_1, f_2, f_3). Quelle est sa matrice dans (e_1, e_2, e_3) ?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans (e_1, e_2, e_3). Quelle est sa matrice dans (f_1, f_2, f_3) ?

Exercice 4.14

Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbf{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et déterminer u^{-1}.
2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbf{R}^3$ telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
3. Déterminer P la matrice de passage de (i,j,k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1}.
4. En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.