Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille 4.
Espaces vectoriels ; familles libres et génératrices.

Exercice 1 $(*)$
Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 0\}$.
2. L'ensemble $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 1\}$.
3. L'ensemble $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$.
4. L'ensemble $D_4 = \{(\alpha, 2\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$.
5. L'ensemble $D_5 = (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) \cup (\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-)$.
6. L'ensemble $D_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$.
7. L'ensemble $D_7 = \{(\alpha, \beta, 0) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$.
8. L'ensemble $D_8 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ xy + yz + z + x = 0\}$.
9. L'ensemble $D_9 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + y + z = 0\}$.
10. L'ensemble $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$.

Exercice 2 $(*)$
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. Dans $\mathbf{R}^2$: (a) $((3, 2), (4, -1))$ (b) $((3, 2), (4, -1), (5, -2))$.
2. Dans $\mathbf{R}^3$: (a) $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ (b) $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1))$

Exercice 3
Pour quels $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille $(3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$ est-elle libre dans $\mathbf{R}^4$?

Exercice 4
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et e, f, g trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On pose $u = e + f$, $v = e + g$ et $w = f + g$.

1. Montrer que la famille (e, f, g) est libre si et seulement si la famille (u, v, w) est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par (e, f, g) est égal au sous-espace engendré par (u, v, w).

Exercice 5 $(*)$
Dans $\mathbf{Q}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w). Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 6 $(*)$
Montrer que les deux familles de vecteurs $((1, 2, -1, 3), (2, 4, 1, -2), (3, 6, 3, -7))$ et $((1, 2, -4, 11), (2, 4, -5, 14))$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient $e_1, \dots, e_k$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ l'application définie pour $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$ par

$$\Phi[(\lambda_1, \dots, \lambda_k)] = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k.$$

1. Montrer que $(e_1, \dots, e_k)$ est générateur de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si Φ est une surjection.

2. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre si et seulement si Φ est une injection.

Exercice 8 $(*)$

1. Donner un exemple d'entier n et de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ tels que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 9

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$.

Exercice 10 $(*)$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit (u, v, w) une famille libre de $\mathbf{R}^n$. On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?
3. Donner une base de F.

Exercice 11 $(*)$

Soit $n \geqslant 0$ un entier. On note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_n[X]$?
2. Soit $(P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes telle que chaque P_k soit de degré k. Montrer que cette famille est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Soit a un réel. Comment s'expriment les coordonnées d'un polynôme P de degré inférieur ou égal à n dans la base $(1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n)$?

Exercice 12

Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur E.
2. Les sous-ensembles suivants de E sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
   (a) L'ensemble des applications linéaires ?
   (b) L'ensemble des applications continues ?
   (c) L'ensemble des applications de classe C^∞ ?
   (d) L'ensemble des applications surjectives ?
   (e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini ?

Exercice 13

Dans l'espace E de l'exercice précédent, montrer que les familles suivantes sont libres (par abus de notation, on note parfois dans la liste qui suit $f(x)$ pour signifier f)

1. $(\sin, \cos)$,
2. (x, x^2, x^3),
3. (e^x, e^{2x}, e^{3x}),
4. (e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}), où a, b et c sont trois réels distincts.