Correction d'une erreur de calcul faite en TD.

Il s'agissait de décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$J(X) = \frac{X}{X^4+1} \ .$$

On commence par remarquer que le numérateur est de degré 1 et le dénominateur de degré $4 > 1$; il n'y aura donc pas de partie entière, et on passe à la factorisation du dénominateur :

$$X^4+1 = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X - e^{\frac{-3i\pi}{4}}) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \ .$$

La décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ sera donc de la forme

$$\frac{X}{X^4+1} = \frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} \ .$$

Comme $J(X) = -J(-X)$, on doit avoir

$$\frac{aX+b}{X^2-\sqrt{2}X+1} + \frac{cX+d}{X^2+\sqrt{2}X+1} = -\left(\frac{-aX+b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{-cX+d}{X^2-\sqrt{2}X+1}\right) = \frac{aX-b}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{cX-d}{X^2-\sqrt{2}X+1} \ ,$$

et donc (en identifiant les coefficients, ce qu'on peut faire par unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle) on a $a = c$ et $d = -b$. Reste à calculer a et b. En TD, on a fait le calcul en passant par les nombres complexes, et une erreur s'est (lâchement) glissée dans une ligne de calcul effacée trop vite - reprenons : en multipliant par $X^2 - \sqrt{2}X + 1 = (X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{-\frac{\pi}{4}})$, et en substituant $x = e^{\frac{i\pi}{4}}$, on obtient

$$\begin{aligned} ae^{\frac{i\pi}{4}} + b &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{3i\pi}{4}})(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{-3i\pi}{4}})} \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{i\pi}{2}}(e^{\frac{-i\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}})e^{\frac{-i\pi}{4}}(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{-i\pi}{2}})} \\ &= \frac{1}{2i\mathrm{Im}(e^{\frac{-i\pi}{4}}).2i} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

(L'erreur de calcul au tableau se trouvait dans le passage de la première à la deuxième ligne, dans une factorisation trop rapide par $e^{\frac{i\pi}{4}}$, qui a conduit à un $e^{\frac{-i\pi}{4}}$ manquant dans le résultat...).

En identifiant la partie imaginaire de $ae^{\frac{i\pi}{4}} + b$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (et en n'oubliant pas que a et b sont réels !) on obtient $a = 0$, et ensuite on a $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On obtient finalement la décomposition suivante :

$$J(X) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{X^2-\sqrt{2}X+1} - \frac{1}{X^2+\sqrt{2}X+1}\right) \ .$$

Si on n'aime pas les nombres complexes, ou qu'on a peur de faire une erreur de calcul (il faudrait en tout cas toujours faire les calculs soigneusement... suivez mon regard), on peut aussi utiliser les informations données par les valeurs réelles de la fonction : en regardant la limite de $xJ(x)$ quand x tend vers $+\infty$, on obtient $0 = a + c$; puisque $a = c$ on en déduit $a = c = 0$ (c'est comme ça qu'on a pu se rendre compte que le résultat obtenu en TD était manifestement faux). Ensuite, en substituant en une valeur bien choisie (pas 0 qui va nous redonner $0 = b + d$, mais par exemple 1...) on a

$$\frac{1}{2} = \frac{b}{2-\sqrt{2}} + \frac{d}{2+\sqrt{2}} = \frac{b}{2-\sqrt{2}} - \frac{b}{2+\sqrt{2}} \ .$$

En réduisant au même dénominateur, on arrive à

$$\frac{1}{2} = b\frac{(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = b\frac{2\sqrt{2}}{2} = b\sqrt{2} \ .$$

On trouve de nouveau (ouf...) $b = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.