Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Fiche d'exercices 2 : encore des polynômes.

Sauf précision contraire, tous les polynômes considérés seront à coefficients complexes.

Exercice 2.1
Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que $P(X)+1$ soit divisible par $(X-1)^3$ et $P(X)-1$ soit divisible par $(X+1)^3$.

Exercice 2.2 $(*)$
On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ (on pourra utiliser judicieusement le fait que P est pair).

Exercice 2.3
Soit le polynôme réel $P(X) = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer a.
2. Montrer que -1 est racine double de P.
3. Montrer que j est racine multiple de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2.4
Soit θ un réel, et n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer (sans le calculer) que le reste de la division euclidienne de $X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$ par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ est nul.

Exercice 2.5 $(*)$
Soient les polynômes $A(X) = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B(X) = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer leur PGCD unitaire. En déduire un couple de polynômes (U_0, V_0) vérifiant l'identité de Bézout. Déterminer tous les couples de polynômes (U, V) vérifiant cette identité.
Reprendre l'exercice avec $A(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ et $B(X) = X^3 - X^2 + 2X - 1$.

Exercice 2.6 $(*)$
Soit n et m deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 2.7 $(*)$
Soient A, B et C des polynômes. Montrer que si A et B divisent C, et que A et B sont premiers entre eux, alors AB divise C.

Exercice 2.8
Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 2.9 $(*)$
Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, et soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose $e_0 = 1$ et, pour k compris entre 1 et n :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des e_k :

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \quad e_2 = (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_n) + \cdots + (z_{n-1}z_n),$$

$$e_{n-1} = z_2 \cdots z_n + z_1z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 \cdots z_{n-1}, \quad e_n = z_1z_2 \cdots z_n.$$

1. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), écrire explicitement e_1, e_2 (resp. e_1, e_2, e_3) et montrer que
$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1X + e_2 \qquad \big(\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3\big).$$
2. Pour n quelconque, montrer que l'on a :
$$\prod_{j=1}^{n}(X - z_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e_k X^{n-k} .$$
3. Sachant que $2i$ et $3-i$ sont des racines de $X^3 + (i+1)X^2 - (8+4i)X - 4 + 28i$, calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, déterminer sans calcul $\sum_{1 \leq j \leq n} e^{2\pi ij/n}$ et $\sum_{1 \leq j < k \leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$.

Exercice 2.10

Soit $P(X) = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 2.11

Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 2.12 $(*)$

1. Factoriser le polynôme $X^2 - X + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 2.13 $(*)$

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ défini par $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$.

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé P'.
2. Montrer que P n'admet aucune racine réelle.
3. Déduire des questions précédentes que P admet 3 racines distinctes dans $\mathbf{C}$, notées α, β et γ.
4. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 2.14

Factoriser le polynôme $2X^3 - (5 + 6i)X^2 + 9iX + 1 - 3i$, sachant qu'il a une racine réelle.

Exercice 2.15

Soit $P(X) = (X + 1)^n - e^{2ina}$ (où $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{R}^*$) Factoriser P dans $\mathbf{C}[X]$
(Indication : il pourra être utile d'utiliser, en le justifiant, que pour $\alpha \in \mathbf{R}$ on a $1 - e^{i\alpha} = 2ie^{i\alpha/2}\sin(\alpha/2)$).
En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$. Combien vaut $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$?

Exercice 2.16

On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les racines du polynôme $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$.
Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.