Fiche d'exercices 1 : Polynômes.

Exercice 1.1 $(*)$
Déterminer tous les polynômes P vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2+1) = P(X)$,
2. $P(2X+1) = P(X)$,
3. $(1-X)P'(X) - P(X) = X^n$, où $n \in \mathbf{N}$,
4. $P'(X)^2 = 4P(X)$,
5. $P(P(X)) = P(X)$.

Exercice 1.2 $(*)$
Montrer que le polynôme $P(X) = X^{163} - 24X^{57} - 6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

Exercice 1.3
Soient a, b des réels, et $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme P est-il le carré d'un polynôme de $\mathbf{R}[X]$?

Exercice 1.4 **(Polynômes de Tchebychev)** $(*)$
On considère la suite de polynômes $P_n(x)$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, et pour $n \in \mathbf{N}$,

$$P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer le terme de plus haut degré de P_n.
3. Étudier la parité de P_n.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on a $P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exercice 1.5 $(*)$
Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes qui le divisent dans l'anneau de polynômes précisé :

1. $X+1$ dans $\mathbf{R}[X]$,
2. X^2-1 dans $\mathbf{R}[X]$,
3. X^2+1 dans $\mathbf{C}[X]$,
4. X^2+1 dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 1.6

1. Soient P_1, P_2 et Q trois polynômes. Montrer que $P_1 - P_2$ divise $Q(P_1) - Q(P_2)$.
2. Soit P un polynôme. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

Exercice 1.7 $(*)$
Quelles sont les racines (dans $\mathbf{C}$, dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{Q}$) des polynômes suivants ?

1. $X^3 - 7X^2 + 14X - 8$,
2. $X^n - 1$, où n est un entier,
3. $X^6 - 4$,

4. $X^4 - 13X^2 + 36$,
5. $X^4 + 6X^2 + 25$.

Exercice 1.8 $(*)$

1. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que, pour tout $a \in \mathbf{C}$, on a $\overline{P(a)} = P(\overline{a})$.
2. Soit P, Q deux polynômes à coefficients complexes tels que $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P = Q$.
3. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $P \in \mathbf{R}[X]$.

Exercice 1.9 $(*)$

Calculer $P(X) = (X^3 - X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. En déduire une preuve que 100009 n'est pas un nombre premier.

Exercice 1.10

Soit P un polynôme, et soient a et b deux réels distincts. Soient λ (respectivement, μ) le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$ (respectivement, par $X - b$). Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$. Commenter le cas $\lambda = \mu = 0$.

Exercice 1.11

Établir les identités, pour $n \in \mathbf{N}^*$

$$X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1),$$

$$X^{2n+1} + 1 = (X + 1)(X^{2n} - X^{2n-1} + X^{2n-2} - \cdots + (-1)^p X^p \cdots - X + 1).$$

En déduire les résultats suivants

1. Si le nombre de Mersenne $M_n = 2^n - 1$ est premier, alors n est premier.
2. Si le nombre de Fermat $F_n = 2^n + 1$ est premier, alors n est soit nul, soit une puissance de 2.

Exercice 1.12 $(*)$

Pour quels entiers n le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$ (dans $\mathbf{R}[X]$) ?

Exercice 1.13 $(*)$

Factoriser les polynômes suivants en polynômes irréductibles

1. $X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ dans $\mathbf{C}[X]$,
2. $X^{11} + 2^{11}$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$,
3. $X^4 + 4$ dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$, et enfin dans $\mathbf{Q}[X]$,
4. $X^4 - j$ dans $\mathbf{C}[X]$, où $j = \exp(2\imath\pi/3)$.
5. $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.
6. $X^5 - 1$ dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 1.14 $(*)$

Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbf{R}[X]$ et sur $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 1.15

Soit $a \in \mathbf{R}$, $n \in N$, et le polynôme $P(X) = (\cos a + X \sin a)^n$. Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 + 1$.