4.4 Hyperplan médiateur

4.4.1 déf / prop Soient $a, b \in E$, $a \neq b$. Soit $\mathcal{M} = \{m \in E,\ ma = mb\}$. Alors $\mathcal{M}$ est un hyperplan affine de E perpendiculaire à (ab) et passant par le milieu i de a et b.

preuve : Notons $P = i + \{\vec{ab}\}^\perp$ c'est le sous-espace affine passant par i dirigé par l'orthogonal de la droite $\mathrm{Vect}\{\vec{ab}\}$. On a $\dim P = \dim E - \dim \mathrm{Vect}\{\vec{ab}\} = \dim E - 1$ donc P est un hyperplan, et il est bien perpendiculaire à (ab) car $i \in (ab) \cap P$ et $\vec{ab} \perp \{\vec{ab}\}^\perp$.

Voyons que $P = \mathcal{M}$ par double inclusion.

"$P \subseteq \mathcal{M}$" Soit $m \in P$ alors $\vec{im} \in \{\vec{ab}\}^\perp$. Comme $\vec{ai} = \vec{ib} = \frac{1}{2}\vec{ab}$ alors $\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle = \langle \vec{im}, \vec{bi}\rangle = 0$ et $am^2 = ai^2 + im^2 = bi^2 + im^2 = bm^2$ donc $m \in \mathcal{M}$.

"$\mathcal{M} \subseteq P$" Soit $m \in \mathcal{M}$ alors on a les égalités

$$am^2 = bm^2$$
$$ai^2 + im^2 + 2\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle = bi^2 + im^2 + 2\langle \vec{bi}, \vec{im}\rangle$$
$$\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle = \langle \vec{bi}, \vec{im}\rangle = \langle \vec{ia}, \vec{im}\rangle \quad (\text{car } \vec{bi} = \vec{ia})$$

d'où $\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle = -\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle$ et donc $\langle \vec{ai}, \vec{im}\rangle = 0$.

On en déduit $\frac{1}{2}\langle \vec{ab}, \vec{im}\rangle = 0$ donc $m \in P$.

Remarque On peut décrire $\mathcal{M}$ comme

$$\{m \in E,\ \langle \vec{im}, \vec{ab}\rangle = 0\}$$