Feuille d'exercices numéro 4
Adjoints - Endomorphismes orthogonaux, endomorphismes symétriques

De quoi aller-venir entre endomorphismes et matrices

Exercice 1
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer les équivalences suivantes :

1) (traitée en cours : c'est de la révision)
u est orthogonal $\iff$ Dans toute base orthonormale de E, la matrice de u est orthogonale.
u est orthogonal $\iff$ Il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est orthogonale.

2) u est autoadjoint $\iff$ Dans toute base orthonormale de E, la matrice de u est symétrique.
u est autoadjoint $\iff$ Il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exemples de matrices orthogonales et d'endomorphismes orthogonaux

Exercice 2
L'objectif de cet exercice est d'expliciter toutes les matrices orthogonales $(2, 2)$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale.

a) Montrer qu'il existe un θ réel tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$.

b) Montrer que le vecteur $(d, -b)$ est colinéaire au vecteur (a, c).

c) Montrer que A est nécessairement d'une des deux formes suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

2) Montrer que les matrices orthogonales $(2, 2)$ sont exactement les R_θ et les S_θ.

3) Montrer que l'ensemble des R_θ est un groupe pour la multiplication des matrices. Est-il commutatif ? Le groupe orthogonal est-il commutatif, en dimension 2 ?

4) On se place dans un plan euclidien muni d'une base orthonormée.

a) Interpréter géométriquement les endomorphismes r_θ et s_θ ayant pour matrices respectives R_θ et S_θ.

b) Montrer que le produit de deux réflexions s_θ et s_φ est une rotation. Obtient-on ainsi toutes les rotations ?

Exercice 3
Soit $u_1, \ldots, u_n$ des réels tels que $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$, et soit $A = (a_{ij})$ la matrice définie par : $a_{ij} = u_i u_j$. On note $B = 2A - I$. Montrer que B est une matrice orthogonale.

Exercice 4
Quelle peut être la valeur du déterminant d'un endomorphisme orthogonal ? Quelles peuvent être les valeurs propres (réelles) d'un endomorphisme orthogonal ?
Quelles sont les projections orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ? Quelles sont les symétries orthogonales qui sont des endomorphismes orthogonaux ?

Exercice 5
On se place dans un espace euclidien E de dimension 3. Soit u un endomorphisme orthogonal, qu'on suppose de déterminant 1.

1) Montrer que u a au moins une valeur propre (réelle).

2) Montrer que 1 est valeur propre de u. Est-ce forcément la seule ?

3) On note e_1 un vecteur propre de u pour la valeur propre 1 normalisé de telle sorte que $\|e_1\| = 1$.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de E prolongeant e_1.

b) Quelle forme a la matrice de u dans cette base ?

Exemples de matrices symétriques et d'endomorphismes autoadjoints

Exercice 6
Soit A la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Expliciter une matrice P orthogonale pour laquelle $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 7
Soit B la matrice symétrique :

$$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer B^2 et en déduire que B est orthogonale. Expliciter une matrice Q orthogonale pour laquelle $Q^{-1}BQ$ est diagonale.

Exercice 8
Soit E euclidien et F un sous-espace de E. On note p_F la projection **orthogonale** sur F.

1) (On pourra utiliser l'exercice 1 !). Montrer que p_F est autoadjoint et en déduire que la matrice de p_F dans n'importe quelle base orthonormée de E est une matrice symétrique.

2) Dans cette question on suppose que F est une droite dont on note e une base normée, et on travaille dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On note X le vecteur-colonne des coordonnées de e dans $(e_1, \ldots, e_n)$, et $A = (a_{ij})$ la matrice de p_F dans $(e_1, \ldots, e_n)$.

a) Montrer que pour tous i, j entre 1 et n, $a_{ij} = \langle e_i, e\rangle\langle e_j, e\rangle$.

b) On regarde de nouveau l'exercice 3. Démontrer de nouveau que B est une matrice orthogonale, mais cette fois en expliquant sa signification géométrique.

Exercice 9
(Réciproque du précédent) Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E vers E. On suppose p autoadjoint. Montrer que p est une projection orthogonale.

Exercice 10
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ du produit scalaire canonique.

1) Vérifier que ce produit scalaire se polarise en la forme bilinéaire :

$$b(H, K) = \mathrm{Tr}({}^tHK).$$

2) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par :

$$\Phi(M) = {}^tAMA + AM{}^tA.$$

Vérifier que Φ est un endomorphisme autoadjoint.

L'adjoint

Exercice 11
Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} v^* = (\operatorname{Im} v)^\perp \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} v^* = (\operatorname{Ker} v)^\perp.$$

Exercice 12
On dit qu'un endomorphisme u d'un espace euclidien E est **non-expansif** lorsque pour tout vecteur $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Soit u un endomorphisme non-expansif d'un espace euclidien E.

1) Montrer que pour tous vecteurs x et y de E :

$$|\langle y, u^*(x)\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

En déduire que u^* est lui aussi non-expansif.

2) En partant d'un x élément de $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ et en manipulant l'expression $\langle u^*(x) - x, u^*(x) - x\rangle$, montrer l'inclusion : $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u^* - \operatorname{Id})$.

3) En utilisant la question précédente et l'exercice précédent, montrer que $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{Id})$ et $\operatorname{Im}(u - \operatorname{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux.

4) Quels sont les endomorphismes non-expansifs dont la décomposition de Dunford est de la forme $\operatorname{Id} + n$, n nilpotent ?

Le théorème spectral

Exercice 13
Dans l'équivalence suivante, concernant les endomorphismes u des espaces euclidiens :

$$u \text{ est autoadjoint} \iff \text{il existe une base orthonormale diagonalisant } u$$

un sens est beaucoup plus facile à montrer que l'autre. Lequel ? Démontrez le.

Exercice 14
Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$, puis que A est orthogonale. Que dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormale ?

Exercice 15
Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que sur l'ensemble des matrices symétriques positives l'application $A \mapsto A^k$ est injective. L'est-elle sur l'espace des matrices symétriques ?

Exercice 16
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Réduction des formes quadratiques : le retour

Exercice 17
Soit q la forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A de l'exercice 6 Utiliser les calculs menés dans cet exercice pour fournir une base q-orthogonale.

Exercice 18
Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{R}$ et soit q_1 et q_2 deux formes quadratiques sur E. On suppose q_1 définie positive. Montrer qu'il existe une base orthogonale à la fois pour q_1 et pour q_2.

Interventions de ${}^tAA$ ou de $u^* \circ u$

Exercice 19
Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer les équivalences :

$$B \text{ est symétrique positive} \iff \text{il existe } A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ telle que } B = {}^tAA;$$

$$B \text{ est symétrique définie positive} \iff \text{il existe } A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \text{ telle que } B = {}^tAA.$$

Exercice 20
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle. Montrer que ses valeurs propres λ_i (énumérées avec multiplicité) satisfont à l'identité :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

Exercice 21
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E qui diagonalise $u^* \circ u$, puis vérifier que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale.

Exercice 22
Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.
Montrer que :

$$u \text{ est non-expansif} \iff \text{toutes les valeurs propres de } u^* \circ u \text{ sont dans } [0, 1].$$

(le terme "non-expansif" a été défini à l'exercice 12).

Décomposition polaire

Exercice 23
Soit F l'espace des matrices $(2, 2)$ de la forme $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, a, b réels et soit $\varphi \colon F \to \mathbf{C}$ définie par $\varphi(M_{a,b}) = a + ib$.

1) Montrer que F est un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et que φ est un isomorphisme d'anneaux entre F et $\mathbf{C}$.

2) Soit $M = M_{ab}$ une matrice élément de F. On note $M = UH$ sa décomposition polaire. Expliciter successivement les images par φ de ${}^tM$, de ${}^tMM$, de H et de U.