Feuille d'exercices 3
Logique et raisonnement

Exercice 1.

1 Vrai-Faux

1. $\left(6 < \frac{25}{4}\right) \Rightarrow \left(\sqrt{6} < \frac{5}{2}\right)$.
2. $(2 = 3) \Rightarrow (4 \text{ est un nombre pair})$.
3. $(2 = 3) \Rightarrow (3 = 4)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \big((x \leq 0) \Rightarrow (x - 1 < 0)\big)$.
5. Pour tout réel x, on a $x \leq 0$ donc $x - 1 < 0$.

2 Analyse-synthèse

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.
2. Déterminer les réels x strictement positifs tels que $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

Exercice 2.

1. Soient P, Q et R trois propositions. Donner la négation des propositions qui suivent.
   a. $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$.
   b. $P \text{ et } (\text{non}(Q) \text{ ou } R)$.
2. Montrer que les propositions qui suivent sont fausses.
   a. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (xy \neq 0 \text{ et } x \leq y) \Rightarrow \left(\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right)$.
   b. $\exists x \in \mathbb{R}, \Big((x \leq 0) \text{ et } \Big(\big(\sqrt{x^2} \neq -x\big) \text{ ou } \big((x+1)^2 > x^2 + 1\big)\Big)\Big)$.

Exercice 3. Contraposée.

1. Montrer que, pour toutes proposition P et Q.
$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \big(\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)\big)$$
2. Montrer, que pour tous réels x et y, $(x \neq y) \Rightarrow ((x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair.

Exercice 4.

1. Montrer la transitivité de l'implication, c'est-à-dire que, pour toutes propositions P, Q et R,
$$\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$
2.
   a. Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Rightarrow (2 \leq x \leq 3)$.
   b. Montrer que, pour tout réel x, $(x^2 - 5x + 6 \leq 0) \Rightarrow \big((x-1)(10-x^2) \geq 0\big)$
3. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que :
$$(P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow P)$$
Equivaut à
$$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \text{ et } (R \Rightarrow P)$$
4. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les assertions qui suivent sont équivalentes :
a. $\forall t \in \mathbb{R}, x_0^2 + y_0^2 \leq (t - x_0)^2 + (-t - y_0)^2$;
b. $x_0 - y_0 = 0$;

c. $\forall t \in \mathbb{R}, x_0 t + y_0(-t) \leq 0.$

Exercice 5.

Absurde.

1. Montrer que, pour toutes propositions P et Q,
$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \text{non}\big(P \text{ et } \text{non}(Q)\big)$$
2. Montrer que, pour tout réel x, $(-x^4 + x^3 + x - 11 \leq 0) \Rightarrow (-x^4 + x^3 - 9 < 0)$.
3. Soit $\mathcal{P} = \{2k\,; k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1\,; k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 6.

1. Montrer que pour toutes propositions P, Q et R,
$$\big(P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)\big) \Leftrightarrow \Big(\big(P \text{ et } \text{non}(Q)\big) \Rightarrow R\Big).$$
2. Montrer que, pour tout réel x, $(x^3 + x^2 - x - 1 > 0) \Rightarrow \big((x \leq 1) \text{ ou } (x^4 > 1)\big)$.

Exercice 7.

1. Soit x et y deux nombres réels. Nier la proposition
$$(x = 2) \text{ et } \big((x + y = 5) \text{ ou } (y \geq 3)\big).$$
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \big((|x - y| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\big).$$
3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. Nier
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \big((n \geq N) \Rightarrow (|f_n(x) - f(x)| < \epsilon)\big).$$

Exercice 8. Examiner la véracité des propositions qui suivent.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, x \leq \epsilon) \Rightarrow x \leq 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, (x \leq \epsilon \Rightarrow x \leq 0).$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0.$
4. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\forall x \in I, \exists \epsilon > 0,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I.$
5. Pour tout intervalle ouvert I borné, on a : $\exists \epsilon > 0, \forall x \in I,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I.$
6. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right).$
7. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2, \left(x \leq y \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}\right).$

Exercice 9.

1. Ecrire l'énoncé qui traduit « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante ».
2. Cet énoncé est-il équivalent à « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ».

Exercice 10.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.
Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} x_i = 0$, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $x_i = 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} x_i = x$.
Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $x_i \leq \frac{x}{n}$.

Exercice 11. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : soit $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + a)$ soit $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + a)$.

Exercice 12. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour obtenir les énoncés vrais les plus forts.

1. $\dots x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$
2. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0.$
3. $\dots x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0.$
4. $\dots x \in \mathbb{N}, x \leq \pi.$
5. $\dots x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 = 0.$
6. $\dots x \in \emptyset, 2 = 3.$

Exercice 13. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négations.

1. $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 > 7.$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 > 7.$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x^2.$
4. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x^2.$
5. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \big((x \leq y) \Leftrightarrow (x^2 \leq y^2)\big).$
6. $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, \big((xy \leq x^2) \Rightarrow (y \leq x)\big).$

Exercice 14. On note $A = [0,1]$. Examiner les propositions suivantes. Lorsqu'elles sont vraies, en donner une démonstration ; sinon, proposer un contre-exemple.

1. $\forall x \in A, \forall y \in A, x + y \in A.$
2. $\forall x \in A, \exists y \in A, x + y \in A.$
3. $\exists x \in A, \forall y \in A, x + y \in A.$

Exercice 15. On considère la proposition : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathbb{R}_+, \big((z \leq y) \Rightarrow (z^2 \leq x^2)\big).$
L'écrire en français puis décider de sa véracité.

Exercice 16. Donner une preuve directe et aussi une preuve par récurrence des faits suivants :

1. La somme $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$ des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 17. Montrer par récurrence que si $a \in]0,1[$, alors $1 - na < (1-a)^n < 1/(1+na)$.

Exercice 18. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ établir l'inégalité : $|\sin(n\alpha)| \leq n|\sin(\alpha)|$. Indication : utiliser la formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Exercice 19. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$. Calculer $A_{n+1} - 2A_n$. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, A_n est divisible par 7.

Exercice 20. Trouver une faute dans le raisonnement :

On « montre » par récurrence que $2^n = (-1)^n$ pour tout n comme suit. On initialise avec $n = 0$. Hérédité : les deux suites sont solutions de $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Conclusion : $2^n = (-1)^n$.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n}(2k+1)$.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exercice 22.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, on a $n^2 \leq 2^n$.
2. Montrer que pour toute fonction $j: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et pout tou $n \in \mathbb{N}$, on a $j(n) \geq n$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle déterminée par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ pour tout $n \geq 0$. Donner une expression de v_n en fonction de n.

Exercice 23.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, puis montrer que $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, puis montrer que $\exists (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2, x^y \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 24.

1. Soit x et y deux réels distincts de 1. Montrer que si $x \neq y$, alors $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.
2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.
3. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 25. Pythagore réciproque. On admet le théorème Pythagore « direct » :

Si ABC est un triangle rectangle avec l'angle droit en A, alors $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.

Prouver la réciproque suivante :

Si dans un triangle ABC on a $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A.