
Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.
La partie d'analyse et la partie d'algèbre doivent être rédigées sur deux feuilles distinctes.

Partie analyse

Exercice 1. Déterminer la nature de la série numérique

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}$$
est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. On pose, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \cos x \, \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) f_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sin(2x).$$
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Tracer le graphe de f. *On prendra soin de faire un schéma propre, respectant les propriétés essentielles de f (variations, symétries, limites), et d'expliciter ses zéros.*
4. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin x - x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$
5. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout segment.
On pourra utiliser la question précédente ainsi que l'inégalité $|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$ pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
6. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Partie algèbre

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Soit u un endomorphisme de E. On suppose que F est stable par u.
Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Donner un exemple d'un endomorphisme u satisfaisant les conditions de l'énoncé ci-dessus et pour lequel $E = \mathbb{R}^2$ et le sous-espace G n'est pas stable par u.
2. Le sous-espace $u(F)$ est-il nécessairement stable par u ?
3. Donner un exemple d'un endomorphisme u satisfaisant les conditions de l'énoncé ci-dessus et pour lequel : G n'est pas stable par u et il existe un sous-espace H de E stable par u et qui est différent de $\{0_E\}$, de F et de E. On poura s'inspirer de la question 1 ou créer un autre exemple.
4. On suppose dans cette question que 0 n'appartient pas au spectre de u et que G est de dimension 1 et stable par u.
   (a) Soit b un générateur de G. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $u(b) = \alpha b$.
   (b) On suppose que l'endomorphisme induit u_F est surjectif. Montrer que u est aussi surjectif.
5. Dans cette question on suppose que G est stable par u et que les endomorphismes induits u_F et u_G sont injectifs. Montrer que u est aussi injectif.

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes. Soient f et g les endomorphismes de E suivants :
f est défini par $f(P) = (X+1)P$ et g est défini par $g(P) = P(X+1)$.
Concernant f, il s'agit d'une multiplication alors que pour g, on remplace X par $X+1$ dans l'écriture de P.

1. Montrer que le spectre de f est vide.
2. (a) Montrer que si λ est une valeur propre de g alors $\lambda = 1$.
   (b) Déterminer le spectre de g.