Exercice 4

1) Ici on pose $F = \text{Vect}\{(1,0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0,1)\}$. On a bien $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.

Soit $u : (x,y) \mapsto (x+y, y)$. On a $u(1,0) = (1,0)$ donc F est u-stable

et on a $u(0,1) = (1,1) \notin G$ donc G n'est pas u-stable

2) Oui : Soit $y \in u(F)$. Alors $u(y) \in u(F)$.

3) On reprend les espaces F et G de la question 1.

On définit $u : (x,y) \mapsto (x+y, 2y)$

Soit $H = \text{Vect}\{(1,1)\}$. On a : $u(1,0) = (1,0)$ donc F est stable par u

On a : $u(0,1) = (1,2) \notin G$ donc G n'est pas u-stable.

Enfin, on a : $u(1,1) = (2,2) \in H$ donc H est u-stable

et $H \notin \{ \{0_{\mathbb{R}^2}\}, F, \mathbb{R}^2 \}$

4) (a) On a $u(b) \in G = \text{Vect}\{b\}$ car G est stable

Donc $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $u(b) = \alpha b$. De plus $\alpha \neq 0$ car $0 \notin \text{spec}(u)$.

b) Soit $z \in E = F \oplus G$. Il existe un (unique) couple $(f,g) \in F \times G$

t.q. $z = f + g$. Par surjectivité de u_F, $\exists x \in F$ tq $u(x) = u_F(x) = f$.

D'autre part $g \in G = \text{Vect}\{b\}$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $g = \lambda b$.

Par (a), $u(\lambda \frac{1}{\alpha} b) = \lambda \frac{1}{\alpha} u(b) = \lambda b = g$.

On a alors $u(x + \frac{\lambda}{\alpha} b) = u(x) + u(\frac{\lambda}{\alpha} b) = f + g = z$ d'où la surjectivité de u.

5) Soit $z \in \ker(u)$. Il existe $f \in F$ et $g \in G$ tq $z = f + g$

On $0 = u(z) = u(f) + u(g)$. Or F et G sont u-stable donc

$u(f) \in F$ et $u(g) \in G$. F et G étant en somme directe, l'égalité

précédente implique $u(f) = u(g) = 0$ ie $u_F(f) = u_G(g) = 0$.

L'injectivité de u_F et u_G entraine $f = g = 0$ puis $z = 0$

d'où l'injectivité de u.

Exercice 5

1) Supposons que $\lambda \in \mathrm{spec}(f)$. Alors $\exists P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tq $f(P) = \lambda P$ ie tq $\lambda P = (X+1)P$. Cette égalité est impossible car le degré de $(X+1)P$ est plus grand que celui de λP.

2) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(g)$. Alors $\exists P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tq $g(P) = \lambda P$

ie t.q. $\lambda P(X) = P(X+1)$ (1)

Ecrivons $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$

L'égalité (1) devient :

(2) $\lambda a_0 + \dots + \lambda a_n X^n = a_0 + a_1(X+1) + \dots + a_{n-1}(X+1)^{n-1} + a_n(X+1)^n$

Quand on développe le polynôme de droite on obtient un polynôme dont le monôme dominant est $a_n X^n$. Par identification dans (2) on obtient $\lambda a_n = a_n$ mais $a_n \neq 0$ donc $\lambda = 1$.

(b) La question 1 nous dit que $\mathrm{spec}(g) = \emptyset$ ou $\mathrm{spec}(g) = \{1\}$.

Voyons si 1 est une valeur propre en examinant E_1.

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tq $g(P) = 1 \times P$ ie $P(X) = P(X+1)$.

Montrons que $\deg(P) = 0$ ie P est un polynôme constant.

Si P n'est pas constant alors soit α sa plus grande racine (on rappelle que dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme non-constant est scindé).

Alors $0 = P(\alpha) = P(\alpha + 1)$ d'où $\alpha + 1$ est aussi racine de P ce qui est absurde car $\alpha + 1 > \alpha$.

Ainsi P est forcément constant.

Réciproquement si P est un polynôme constant alors $g(P) = P$ ie $P \in E_1$.

Finalement $E_1 = \mathbb{C}_0[X] \neq \{0\}$ et $\mathrm{spec}(g) = \{1\}$.

Cette partie n'est pas nécessaire pour répondre à la question.
Il suffit de dire que par (a) $\mathrm{Spec}(g) \subseteq \{1\}$ puis de voir que $1 \in \mathrm{Spec}(g)$ car $g(P) = 1 \times P$ si P est constant.