Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2022-2023

Math IV - PMI - Analyse

Feuille d'exercices n° 2

Topologie des espaces vectoriels normés

I. Ouverts et fermés

Exercice 1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

1. $]a; b]$ et $[a; +\infty[$ pour a et b réels tels que $a < b$,
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$,
3. $A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 7y\}$,
4. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq z\}$,
5. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| \leq 2\}$,
6. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$,
7. $E = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_1^2 + \cdots + x_p^2 \leq 5\}$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Démontrer que $\mathbb{Z}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$:

1. en observant que son complémentaire est ouvert,
2. par la caractérisation séquentielle des parties fermées.

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$.

1. Montrer que $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.
2. Soit $U = \{f \in E \mid \forall x \in [0; 1], f(x) > 0\}$
   (a) Soit $f \in U$.
      i. Justifier l'existence du minimum de f, que l'on notera m.
      ii. Représenter graphiquement la boule ouverte de centre f et de rayon m.
   (b) Montrer que U est un ouvert de E.

II. Intérieur, adhérence et densité

Exercice 4. Soit $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé. Pour une partie X de E, on note $\overset{\circ}{X}$ l'intérieur de X et $\overline{X}$ l'adhérence de X. Soient A, B deux parties de E.

1. On suppose que $A \subset B$. Montrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Comparer les ensembles $(A \overset{\circ}{\cap} B)$ et $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, puis les ensembles $(A \overset{\circ}{\cup} B)$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.
3. Comparer les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis les ensembles $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 5. Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y + 1\}$,

$G = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $(*) B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 6. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ et on note $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_\infty$.
2. Le but de cette question est de montrer que F n'est pas un fermé de E pour la norme $\| \, . \, \|_1$ mais qu'il est dense dans $(E, \| \, . \, \|_1)$.
   (a) Soit $g \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
   $$\forall t \in \left[0; \frac{1}{n}\right], f_n(t) = ntg\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right], \quad f_n(t) = g(t).$$
   Montrer que $f_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers g pour $\| \, . \, \|_1$.
   (c) Conclure.

III. Compacts

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont, ou ne sont pas, compacts :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^5 = 2\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1 - 2x)\}$.

Exercice 8. On considère $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{C})$ muni de la norme $\| \, . \, \|_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application $f_n : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ par $f_n(x) = e^{inx}$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$.

1. Pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, calculer explicitement $\|f_n - f_p\|_2$.
2. Construire à partir de la suite $(f_n)_n$, une suite $(g_n)_n$ d'éléments de la boule unité fermée $\overline{B}(0_E, 1)$ de E et calculer $\|g_n - g_p\|_2$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\overline{B}(0_E, 1)$ de E n'est pas compacte.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B des parties de E. On définit $A+B=\{a+b \mid (a,b)\in A\times B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B fermé dans E alors $A+B$ est fermé dans E.
2. Montrer que si A et B sont compactes alors $A+B$ l'est aussi.
3. Soient $A=\mathbb{R}\times\{0\}$ et $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$. Montrer que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $A+B$ n'en est pas un.

Exercice 10. Soit $(E,\|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé et $X\subset E$ une partie compacte. Montrer que toute partie fermée de E incluse dans X est elle-même compacte.

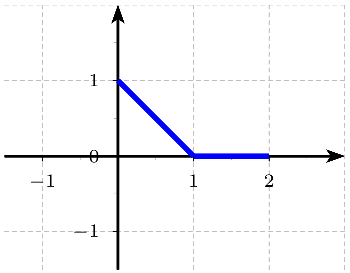
Pour s'entraîner :

Exercice 11. Dans l'exercice, on identifiera les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées afin de ne pas alourdir les notations. On considère l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}[X]$ que l'on munit des trois normes N_1, N_2, N_3 définies par : pour tout $P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\in E$ (avec seulement un nombre fini de coefficients a_k non nuls),

$$N_1(P)=\sup_{t\in[0;1]}|P(t)|\,,\quad N_2(P)=\sup_{t\in[1;2]}|P(t)| \quad \text{et} \quad N_3(P)=\max_{k\in\mathbb{N}}|a_k|\,.$$

On pose $\Omega=\{P\in E \mid P(0)\neq 1\}$ et on note Ω^c son complémentaire dans E.

1. Montrer que Ω est un ouvert de E pour N_1.
2. On considère la fonction f affine par morceaux qui vaut 1 en 0, est nulle sur $[1;2]$ et est représentée par le graphe suivant :



   On admet qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément[1] vers f sur $[0;2]$.

   (a) Montrer que $N_2(P_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et que $P_n(0)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

   (b) À l'aide de la suite $(P_n)_n$, construire une suite d'éléments de Ω^c qui converge vers le polynôme nul pour N_2.

   (c) En déduire que Ω n'est pas un ouvert de E pour N_2.

   (d) Que peut-on en déduire sur les normes N_1 et N_2 ?

3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}_1[X]$ est un fermé de E pour N_3.

1. Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur ce segment.

Pour aller plus loin :

Exercice 12. Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées. On munit E de la norme $\|\,.\,\|_\infty$ définie par :

$$\forall u=(u_n)_n\in E,\quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|\,.$$

1. On note A l'ensemble des suites croissantes de E.

   (a) Soit $(x_k)_k$ une suite d'éléments de A qui converge vers $x\in E$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite réelle $(x_k(n))_k$ converge vers $x(n)$.

   (b) En déduire que l'ensemble A est un fermé.

2. On note C l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

   (a) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on considère la suite $x_k\in C$ définie par

   $$x_k(n)=\frac{1}{n+1} \text{ si } n\leq k \quad \text{et} \quad x_k(n)=0 \text{ si } n>k.$$

   Montrer que la suite $(x_k)_k$ converge vers la suite $x=\left(\frac{1}{n+1}\right)_n$.

   (b) L'ensemble C est-il fermé ?

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{F}\neq\emptyset$, alors $F=E$. En déduire les sous-espaces vectoriels de E qui sont ouverts.
3. On considère un hyperplan H de E c'est-à-dire le noyau d'une forme linéaire non nulle. Il existe alors $a\in E\backslash H$ tel que $E=H\oplus\mathrm{Vect}(a)$. Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.