

Feuille d'exercices n° 1

PRODUITS SCALAIRES ET INÉGALITÉS DE CAUCHY-SCHWARZ

Exercice 1. Les applications suivantes définissent-elles des produits scalaires sur les espaces vectoriels considérés ?

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application φ définie sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$ par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on considère l'application ψ définie sur $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB).$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application χ définie sur $(\mathbb{R}^2)^2$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad \chi((x, y), (x', y')) = 2xx' + 2ayy' + xy' + x'y.$$

4. On note $E = \mathcal{C}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et on considère l'application définie par

$$\forall f, g \in E, \quad b(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1 - t^2) dt.$$

Si oui, (et lorsque cela a un sens) préciser si la base canonique de l'espace vectoriel considéré est orthogonale pour ce produit scalaire.

Exercice 2. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale dont la diagonale est constituée de a_1, \dots, a_n . Soit $\varphi : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(X, Y) = {}^tX \cdot A \cdot Y$. Notez que φ est à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ mais on identifie ce dernier à \mathbb{R} par un abus de notation.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que φ soit un produit scalaire.
2. Sous cette condition, montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ est une base orthogonale.
3. Toujours sous la même condition, déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

1. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire φ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\varphi(2X - 1, X^2 + 1)$.

2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et A la matrice d'un produit scalaire sur E dans une base de E . Montrer que A est inversible.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base d'un espace euclidien (E, \langle, \rangle) . Montrer que \mathcal{B} est orthonormale si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $\langle x, b_i \rangle$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Exercice 5. Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien. On considère une famille $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ constituée d'éléments de E de norme 1. On suppose que pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle^2.$$

1. Montrer que la famille \mathcal{B} est une famille orthogonale.
2. Soit $x \in E$, montrer que $x = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i \rangle b_i$.
3. En déduire que \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

Exercice 6. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel :

$$\forall f, g \in E, \quad \varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $h_n : t \in [0; 1] \mapsto \cos(2\pi nt)$.

1. Montrer que la famille d'applications $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que l'espace vectoriel E n'est pas de dimension finie.

Exercice 7. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer pour tout $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$:

$$\left(\int_a^b |f(t)| dt \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $D = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in \mathbb{R}_+^*\}$. On considère l'application $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$h(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right).$$

Montrer que h admet un minimum sur D et décrire les vecteurs pour lesquels ce minimum est atteint.

Exercice 9. Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, k un réel et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminée par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle + k \langle x, a \rangle \langle y, a \rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie n . Montrer que pour toute base \mathcal{B} de E , il existe un produit scalaire hermitien sur E tel que \mathcal{B} soit orthonormée.

Exercice 12. Soit $\varphi : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{P(e^{it})} Q(e^{it}) dt.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire hermitien.

2. Montrer que la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[X]$ est orthonormée.

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $Q = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$.

3. Calculer $\|Q\|^2$ en fonction des a_i .

4. Soit $M = \sup\{|Q(z)| \mid z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Montrer que $M \geq 1$ et que : $M = 1 \iff Q = X^n$.