Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2022-2023
Algèbre III - PMI

Feuille d'exercices n° 7 : Applications de la réduction

I. Calculs de puissances, d'exponentielles :

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Trigonaliser A de manière à obtenir une matrice diagonale par blocs.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soient a et b deux réels. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme minimal de A, noté π_A.
2. En effectuant la division euclidienne de X^k par π_A, calculer A^k pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
3. Calculer e^{tA} pour tout réel t.

Exercice 3. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & -n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{pmatrix}$, où les n premières colonnes sont égales.

1. Calculer le rang de u et en déduire que le spectre de u a un et un seul élément.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Calculer e^{tu} pour tout réel t.

II. Suites récurrentes linéaires

Exercice 4. Résoudre (dans $\mathbb{R}$) le système récurrent suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n - z_n \\ y_{n+1} = -x_n + z_n \\ z_{n+1} = -2x_n - 3y_n + 3z_n \end{cases}$$

(on pensera à réutiliser les résultats de l'exercice 1).

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Expliciter une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = AX_n$.
2. Utiliser alors le calcul des puissances de A pour en déduire une expression non récurrente de u_n pour $n \in \mathbb{N}$ (on pourra diagonaliser A, ou faire la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme minimal de A).

Exercice 6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}.$$

En adaptant la technique de l'exercice précédent, donner une expression explicite de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Résoudre le système linaire récurrent suivant :

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + z_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} + z_{n-1} \\ z_n = 2z_{n-1}. \end{cases}$$

III. Résolution de systèmes différentiels

Exercice 8. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = 7x(t) - 10y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - y(t) \end{cases}$$

d'inconnues $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivables.

Exercice 9. Déterminer toutes les solutions $x, y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 9y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

qui vérifient $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

Exercice 10. Résoudre le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2x(t) + y(t) - 2z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - y(t) - 2z(t) \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

Exercice 11. Résoudre le système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = CX(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dérivable (on pourra utiliser les résultats de l'exercice 2).

Exercice 12. Résoudre sur l'équation différentielle : $y''' + y'' - y' - y = 0$, puis l'équation différentielle : $y''' + y'' - y' - y = \cos t$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fois dérivable.

Exercice 13. Montrer comment la résolution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y''(t) = -x(t) - y(t) + y'(t) \end{cases}$$

peut être ramenée à celle d'un système linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Pour s'entraîner :

Exercice 14. Soient E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & a^2 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & a^2 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le rang de l'endomorphisme $u - (1-a)\,\mathrm{id}_E$. En déduire que $1 - a$ est valeur propre de u.
2. Si $a = 0$, l'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Dans toute la suite, on suppose que le réel a est non nul.
   Déterminer toutes les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.
5. Notons $E_1 = \mathrm{Ker}(u - (1-a)\,\mathrm{id}_E)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(u - (1+3a)\,\mathrm{id}_E)$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.
6. Exprimer les endomorphismes u^k pour tout entier $k \geq 1$, et e^u en fonction de Id et u et expliciter leurs matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.