

**Feuille d'exercices n° 4**

SUITES DE FONCTIONS

**Exercice 1. Convergence simple et uniforme**

On étudie les suites de fonctions réelles définies par  $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x}{x+n} + \arctan(x)$  et  $g_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{nx}{1+nx}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Les suites de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  convergent-elles simplement sur  $[0, 1]$  ?
2. Convergent-elles uniformément sur  $[0, 1]$  ? Sur  $]0, 1[$  ? Soit  $a \in ]0, 1[$ . Convergent-elles uniformément sur  $[a, 1]$  ?
3. Convergent-elles simplement et uniformément sur  $[1, +\infty[$  ?

**Exercice 2.** On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) \exp(-nx^2).$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[-1, 1]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
3. Montrer que pour tout  $a > 0$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

**Exercice 3.** On considère la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{1+x^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Étudier la convergence uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, 1]$ , puis sur  $[0, 1[$ , puis sur  $[0, a]$  avec  $0 < a < 1$ .

**Exercice 4.** On considère la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies sur  $[0, 1[$  par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

1. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[0, 1[$  vers une fonction  $f$  que l'on précisera.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer (si elle existe) la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x)$ .
3. Que peut-on en conclure sur la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**Exercice 5. Convergence et intégrales**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$ .

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur  $[0, 1]$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 6.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est uniformément convergente sur le segment  $[a, b]$ .
3. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $[a, +\infty[$ .
4. Calculer la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$  de  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Exercice 7.** Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^3 x^2 + 2n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{n}\right]; \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

3. En déduire que  $(f_n)_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 8.** Soit  $(f_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies par

$$f_n : \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos^n(x) \sin(x). \end{cases}$$

1. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .
2. On considère la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  définies par  $g_n = (n+1)f_n$ . Montrer que sur tout intervalle de la forme  $[\delta, \frac{\pi}{2}]$  avec  $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ,  $(g_n)_n$  converge uniformément vers la fonction nulle, mais que pourtant, la suite

$$\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ne tend pas vers 0.

### Exercice 9. Convergence dominée

Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1.  $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$ ,
2.  $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx$ .

**Exercice 10.** Déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} dx$ ,
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt[n]{1+x^n}}$ .

**Exercice 11.** Déterminer la limite, quand  $n \rightarrow +\infty$ , de  $\int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$ .

*Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontrée, l'inégalité  $\ln(1+u) \leq u$  pour tout  $u \geq 0$ .*

**Exercice 12.** Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et intégrable.

Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $n \int_0^1 \frac{f(nt)}{1+t} dt$ .

**Exercice 13.** Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ .

### Exercice 14. Convergence uniforme et dérivées

Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1, 1]$  par  $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ .

1. Montrer que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers la fonction nulle.
2. Étudier la convergence de  $(g'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[-1, 1]$ .
3. On considère la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f_n(x) = \frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$ . Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers 0.

**Exercice 15.** On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \sqrt{n} \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$ .

1. Étudier les modes de convergence de la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
2. En déduire que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Pour aller plus loin :**

### Exercice 16.

1. Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un même intervalle  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $I$ . On suppose que la suite  $(f_n)_n$  converge uniformément vers une fonction **continue**  $f$  et que la suite  $(x_n)_n$  converge vers un réel  $x \in I$ . Montrer que  $f_n(x_n)$  tend vers  $f(x)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
2. En déduire que la suite de fonctions définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g_n(x) = \cos(nx)$  n'admet aucune sous-suite uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ .
3. Retrouver le résultat de la question 2 sans utiliser la question 1 en raisonnant par l'absurde et en considérant l'intégrale sur tout segment  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  de la fonction limite uniforme.