
Devoir n° 3 – Corrigé

PARTIE ANALYSE

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.
On a $f_n(0) = 1$ et, pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction
$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue. La fonction f n'est pas continue donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $]-\infty, -a] \cup [a; +\infty[$ pour tout $a > 0$.
Chaque fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n'(x) = \dfrac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. La dérivée est donc positive sur $\mathbb{R}^-$ et négative sur $\mathbb{R}^+$, donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par parité de f_n, il suffit d'étudier son comportement sur $\mathbb{R}^+$. Comme f_n est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq a$:
$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(a) = \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$
Comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit de ses majorants et que $f_n(a)$ est, par définition, atteint par la fonction, on a
$$\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \frac{1}{(1+a^2)^n}$$
Par parité, on en déduit que
$$\|f_n\|_{\infty,]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[} = \frac{1}{(1+a^2)^n}$$
Comme $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+a^2)^n} = 0$ car $a > 0$, on peut conclure que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur tout ensemble de la forme $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ définies par :
$$h_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h_n(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(h_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ qu'on identifiera.
On a pour tout $x \in [0, n[$, $f_n(x) = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}$ (attention à bien exclure la valeur $x = n$ pour tenir compte du domaine de définition de ln). Or, quand $n \to +\infty$, $\ln(1 - \frac{x}{n}) = -\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n})$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = e^{-x+o(1)}$ quand $n \to \infty$. On en déduit que la suite (h_n) converge simplement vers la fonction $h : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto e^{-x}$.

2. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq h_n(x) \leq h(x)$ (indication : on pourra montrer d'abord que, pour tout $y > -1$, $\ln(1 + y) \leq y$).
Soit $\Psi : y > -1 \mapsto \ln(1 + y) - y$. La fonction Ψ est de classe C^1 sur son ensemble de définition et, pour tout $y > -1$, $\Psi'(y) = \frac{1}{1+y} - 1 = -\frac{y}{1+y}$. Comme le dénominateur est strictement positif sur l'ensemble de définition, on en déduit le signe de Ψ' : la dérivée est positive sur $]-1, 0]$, négative sur $\mathbb{R}^+$. La fonction Ψ est donc croissante sur $]-1, 0]$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que, $\forall y > -1$, $\Psi(y) \leq \Psi(0) = 0$. On conclut que, $\forall y > -1$, $\ln(1 + y) \leq y$.

On a : $\forall n \geq 1$, $\forall x \in [0, n[$, $h_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})}$. Or, $\forall x \in [0, n[$, $-\frac{x}{n} > -1$ donc, d'après ce qui précède et parce que la fonction exp est croissante :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0, n[,\ h_n(x) \leq e^{-x}.$$

Comme, pour tout $n \geq 1$, h_n est positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $[n, +\infty[$, on peut conclure que,

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \geq 0,\ 0 \leq h_n(x) \leq h(x).$$

3. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{bx} dx$ pour tout réel $b < 1$.

   On remarque que $\displaystyle\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{bx} dx = \int_0^{+\infty} h_n(x) e^{bx} dx$. Or, d'après la question précédente, $\forall n \geq 1$, $\forall x \geq 0$, $0 \leq h_n(x) e^{bx} \leq e^{(b-1)x}$. On a, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A e^{(b-1)x} dx = \frac{1}{1-b}(1 - e^{(b-1)A}) \to \frac{1}{1-b} \qquad \text{quand } A \to +\infty \text{ car } b < 1.$$

   La suite de fonctions $(x \mapsto h_n(x) e^{bx})_{n \geq 1}$ est donc positive et majorée sur $\mathbb{R}^+$ par la fonction $x \mapsto h(x) e^{bx} = e^{(b-1)x}$ vers laquelle elle converge simplement. Comme cette fonction majorante est intégrable, on déduit du théorème de convergence dominée que, pour tout $b < 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{bx} dx = \frac{1}{1-b}$$

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ définies par $\varphi_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

1. Montrer que la suite $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction φ qu'on déterminera.

   La suite (φ_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$. On a pour tout x réel :

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} = \frac{1}{n(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2})}$$

   . Or $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2} \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{\frac{1}{n}}$, donc

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

   Cette majoration est vraie pour tout x réel, et le majorant est indépendant de x et tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On en déduit que la suite (φ_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction valeur absolue.

2. Observer que φ n'est pas dérivable en 0 et expliquer soigneusement pourquoi cela ne contredit pas le théorème d'échange entre limite et dérivation pour les suites de fonctions.

   La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Pour pouvoir appliquer le théorème d'échange entre limite et dérivation pour les suites de fonctions, il faut que la suite converge simplement en un point et que la suite des fonctions dérivées converge uniformément. Or, $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$. Chaque fonction φ_n' est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en 0. La suite de fonctions $(\varphi_n')_{n \geq 1}$ converge simplement en tout $x \neq 0$ vers $x \mapsto \frac{x}{|x|}$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   g n'étant pas continue en 0, la suite $(\varphi_n')_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers g. Il n'y a donc aucune contradiction entre les résultats précédents et le théorème d'échange entre limite et dérivation pour les suites de fonctions.

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, X^2)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1. À partir de la forme de A, identifier un sous-espace de $\mathbb{R}_2[X]$ stable par u de dimension 2.
   La matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} B & C \\ (0) & D \end{pmatrix}$, avec $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, par la caractérisation matricielle de la stabilité d'un sev, $F_1 = \mathrm{Vect}(1, X)$ est stable par u.
2. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de u.
   En développant selon la troisième ligne, on trouve
   $$\begin{aligned} \chi_u = \chi_A = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & -2 \\ -1 & X-4 & +4 \\ 0 & 0 & X-5 \end{vmatrix} &= (X-5) \begin{vmatrix} X-2 & 1 \\ -1 & X-4 \end{vmatrix} \\ &= (X-5)\big((X-2)(X-4)+1\big) \\ &= (X-5)(X^2-6X+9) \\ &= (X-5)(X-3)^2 \end{aligned}$$
   Les valeurs propres de u sont donc 5 et 3.
3. Déterminer ses sous-espaces propres.
   $$\begin{aligned} E_5(A) = \ker(A - 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{L_1 \leftarrow 1/2\, L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{=} \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
   et donc $E_5(u) = \mathrm{Vect}(3 - 5X + 2X^2)$.
   $$\begin{aligned} E_3(A) = \ker(A - 3I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{=} \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
   et donc $E_3(u) = \mathrm{Vect}(1 - X)$.
4. Déterminer tous les sous-espaces stables par u de dimension 1. (Indication : se rappeler que ces sous-espaces sont engendrés par des vecteurs propres)
   Les sous-espaces propres E_5 et E_3 sont stables par u et sont de dimension 1. Montrons qu'il n'y a pas d'autre sous-espace stable de dimension 1. Si F est un sous-espace stable de dimension 1, il est engendré par un vecteur propre v. Nécessairement, $v \in E_5$ ou $v \in E_3$, d'où $F = \mathrm{Vect}(v) \subseteq E_5$ ou $F \subseteq E_3$. Comme E_5 et E_3 ont dimension 1, ces inclusions sont en fait des égalités, ce qui veut dire que $F = E_5$ ou $F = E_3$.
5. En utilisant le point précédent, trouver un autre sous-espace stable par u de dimension 2.
   Comme la somme de sous-espaces stables est stable, $F_2 = E_5 + E_3$ est stable. De plus, il est de dimension 2 puisque $E_5 \cap E_3 = \{0\}$, et il ne peut pas être égal à $F_1 = \mathrm{Vect}(1, X)$, car $P = 3 - 5X + 2X^2 \in E_5 \subseteq F_2$, mais $P \notin F_1$.

Exercice 5. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient α un réel et $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ le spectre de $A - \alpha I_n$. Déterminer le spectre de A.
   Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Comme λ_i est une v.p. de $A - \alpha I_n$, il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A - \alpha I_n)v = \lambda_i v$. On a alors $Av - \alpha v = \lambda_i v$, d'où $Av = (\alpha + \lambda_i)v$, ce qui veut dire que $\alpha + \lambda_i$ est une v.p. de A. On a ainsi montré que $\{\alpha + \lambda_1, \ldots, \alpha + \lambda_k\} \subseteq \mathrm{Sp}(A)$.
   On prouve aussi l'autre inclusion. Soit λ une v.p. de A avec v vecteur propre associé. Alors $Av = \lambda v$, d'où $Av - \alpha v = \lambda v - \alpha v$, d'où $(A - \alpha I_n)v = (\lambda - \alpha)v$, c'est-à-dire, $\lambda - \alpha$ est une v.p. de $A - \alpha I_n$ et donc égale à λ_i pour un certain $i \in [\![1, k]\!]$. Il s'ensuit que $\lambda = \alpha + \lambda_i$ et donc $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \{\alpha + \lambda_1, \ldots, \alpha + \lambda_k\}$.
2. Soit λ un réel positif.
   (a) Développer $(A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n)$.
   $(A - \lambda I_n)(A + \lambda I_n) = A^2 - \lambda^2 I_n$
   (b) Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2 si, et seulement si, λ ou $-\lambda$ est une valeur propre de A.
   On montre le "si". Supposons que λ ou $-\lambda$ soit une v.p. de A et soit v un vecteur propre associé. Alors $A^2 v = A(\pm\lambda v) = (\pm\lambda)^2 v = \lambda^2 v$ et donc λ^2 est une v.p. de A^2.
   On montre le "seulement si". Supposons que λ^2 soit une v.p. de A^2 et soit v un vecteur propre associé. Alors $A^2 v = \lambda^2 v$, d'où $(A^2 - \lambda^2 I_n)v = 0$ et, par le point précédent,
   $$(A - \lambda I_n)\underbrace{(A + \lambda I_n)v}_{w} = 0.$$
   Posons $w = (A + \lambda I_n)v$. Si $w = 0$, alors $-\lambda$ est une v.p. de A avec v vecteur propre associé. En revanche, si $w \neq 0$, alors w lui même est un vecteur propre de A associé à la v.p. λ.