Partie Analyse

Exercice 1

1) Considérons la limite : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)+g(x)}{2x}$

qui donne $\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\times 1 + \dfrac{1}{2}\times 1$ par hypothèse
$= 1$

c'est donc vrai.

2) Faux. Considérons f et g définies par $f(x) = x + 2x^2$ et $g(x) = x + x^2$. On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x} = 1$

donc $f(x) \underset{0}{\sim} g(x) \underset{0}{\sim} x$.

Si on avait $f(x) - g(x) \underset{0}{\sim} 0$ alors il existerait une fonction ε définie au voisinage de 0 telle $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ et $f(x) - g(x) = \varepsilon(x) \times 0$ sur un voisinage de 0.

Ainsi $f(x) - g(x)$ serait nul au voisinage de 0 ce qui est faux car $f(x) - g(x) = x^2$.

Exercice 2

Notons $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}$

Pour $x > 0$: $f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - \left(x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/3}$

$= x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/3}$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$ tendent vers 0 ce qui nous permet d'utiliser les DL en 0 de $\sqrt{1+y}$ et de $(1+y)^{1/3}$. On obtient alors :

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right) - x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)\right)$$

On a alors $o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ et idem pour $o\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$

D'où $$f(x) \underset{+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$\underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{6} + o(1)$ et donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{6}$

Exercice 3 On va utiliser des DL à l'ordre 2. C'est en faisant les DL qu'on se rend compte qu'il faut aller jusqu'à l'ordre 2. On va travailler avec $x > 0$.

$$\cos(4\sqrt{x}) \underset{0}{=} 1 - \frac{(4\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(4\sqrt{x})^4}{4!} + o(x^2)$$

$$\underset{0}{=} 1 - 8x + \frac{32}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$8\ln(1+x) \underset{0}{=} 8\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 8x - 4x^2 + o(x^2)$$

$$3x\sin(x) \underset{0}{=} 3x(x + o(x^2)) = 3x^2 + o(x^3)$$

Notons $f(x)$ l'expression à étudier. Alors

$$f(x) = \frac{1 - 8x + \frac{32}{3}x^2 - 8x + 4x^2 - 1 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{32}{3} - 4 + o(1)}{3 + o(1)} \quad \text{après simplification par } x^2$$

D'où $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{32}{3} - 4\right) = \frac{20}{9}$

Exercice 4 : Notons $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^\alpha \ln^2(x)}$.

Pour $x > 0$, $f(x) > 0$ et f est continue sur $]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Ainsi l'intégrale est convergente si et s. si elle est absolument convergente ie ssi elle est finie. La positivité de f implique l'inégalité : $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \geqslant \int_a^2 f(x)\,dx \quad \forall a \in]1, 2[$.

On a : $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{\ln^2(x)}$ donc $\int_1^2 f(x)\,dx$ est de même nature que $\int_1^2 \frac{1}{\ln^2(x)}\,dx$. Dans l'intégrale $\int_a^2 \frac{1}{\ln^2(x)}\,dx$, on considère le changement de variables suivant :

$x = e^t$ avec $dx = e^t\,dt$

On obtient : $\displaystyle\int_a^2 \frac{1}{\ln^2(x)}\,dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(2)} \frac{1}{t^2} e^t\,dt.$

Quand $a \to 1^+$, $\ln(a) \to 0^+$ ce qui nous ramène à l'étude de $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^t}{t^2}\,dt$. Notons que $\frac{e^t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$

donc cette intégrale est de même nature que $\int_0^{\ln(2)} \frac{1}{t^2}\,dt$

Cette dernière est une intégrale de Riemann divergente.

Par conséquent $\int_0^{+} f(x)\,dx = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Partie Algèbre.

Exercice 5

1) $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3 (de base dite canonique $(1, X, X^2)$).

Pour montrer que la famille des P_i est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.q

$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. On a donc

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) X^2 + \lambda_3 X + \lambda_2 = 0.$

Un polynôme est nul seulement si ses coefficients le sont ce qui donne $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$.

La famille est donc libre.

2)

$1 = 1 + X^2 - X^2 = P_2 - P_1$ et

$X = X + X^2 - X^2 = P_3 - P_1$

3) La dérivation est linéaire ie $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$

De façon générale : $f : E \to E'$ est linéaire si $\forall x, y \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

4) $D(P_1) = 2X = -2P_1 + 2P_3$ (par (2))

$D(P_2) = 2X = -2P_1 + 2P_3$

$D(P_3) = 2X + 1 = -2P_1 + 2P_3 + P_2 - P_1$

$= -3P_1 + P_2 + 2P_3$

On a donc

$$M_B(D) = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$P \in \ker(D) \iff D(P) = 0 \iff P' = 0 \iff b + 2cX = 0$

$\iff b = c = 0 \iff P = a \times 1$

$\iff P \in \mathrm{Vect}\{1\}$.

D'où $\ker(D) = \mathrm{Vect}\{1\}$.

Exercice 6

1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ t.q. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i = 0$.

Alors $0 = u(0) = u\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u(b_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i'$

Or les b_i' sont libres donc les λ_i sont nuls.

2) $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tq $u(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i'$

Soit $z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$. On a bien $z \in F$. De plus,

$u(z) = u\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u(b_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i' = u(x)$.

3) On a toujours $0 \in F \cap \ker(u)$ donc $\{0\} \subseteq F \cap \ker(u)$.

Voyons l'inclusion inverse. Soit $x \in F \cap \ker(u)$.

x étant dans F, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tq $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$. On applique u et on obtient $u(x) = u(\sum \lambda_i b_i) = \sum \lambda_i b_i'$ et ceci est nul car $x \in \ker u$. La liberté de la famille des b_i' implique que les λ_i sont nuls et cela entraine $x = 0$.

4) Montrons l'inclusion $E \subseteq F + \ker(u)$, l'inclusion inverse étant triviale.

Soit $x \in E$. Par (2), $\exists z \in F$ tel que $u(x) = u(z)$.

On a alors $x = z + x - z$ avec $z \in F$

et avec $x - z \in \ker(u)$ car $u(x-z) = u(x) - u(z) = 0$.

5) Par (3) et (4) on a : $E = F \oplus \ker(u)$

Par conséquent, $\dim E = \dim F + \dim(\ker u)$

Or $\dim F = m = \dim(\operatorname{Im} u)$ (par (1) et par définition de F)

Ainsi $\dim E = rg(u) + \dim(\ker u)$.