Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2022-2023

Math IV - Cursus préparatoire 2A | Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
2. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
3. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les expliciter.
4. Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$ et expliciter sa différentielle en $(0,0)$. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables respectivement sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x,y) = f(x, y^3, g(x,y)).$$

Montrer que h est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et expliciter sa différentielle en tout point de $\mathbb{R}^2$ en fonction des dérivées partielles de f et de g.

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $A^3 = I_n$ où I_n désigne la matrice identité.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A et en déduire le spectre (réel) de A.
2. Montrer que $A = I_n$

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 5. Dire (en le justifiant !) si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : Pour tout $n \geq 1$ et toute matrice A carrée (n,n) réelle , ${}^tAA$ est diagonalisable $\iff$ A est diagonalisable.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$, et soit A et S deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On suppose A antisymétrique et S symétrique définie positive.

1. Montrer que pour tout vecteur-colonne X avec n composantes (ie tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), ${}^tXAX = 0$.
2. En déduire que $A + S$ est inversible [on pourra s'intéresser aux ${}^tX(A+S)X$].