Partie commune - Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie analyse

Exercice 1. Soit $f : (x, y) \mapsto \dfrac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f ne se prolonge pas par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On rappelle la définition de ch : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}\right.$ et de sh : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}\right.$.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x - y}{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(y)} \text{ si } x \neq y \\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} \text{ si } x = y \end{array}\right.$.

1. Montrer que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En déduire que la fonction f est bien définie.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on pourra utiliser sans la démontrer la formule $\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(y) = 2\,\mathrm{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

Exercice 3. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

1. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(A^2) \leq n^2 \|A\|_\infty^2$.
2. Montrer que l'application $f : M \mapsto \mathrm{tr}(M^2)$ est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{array} \right. \}$.

1. Montrer que $((1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1))$ est une base orthogonale de F.
2. Calculer la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$) de la projection orthogonale sur F.

Exercice 5. Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (f(t) - at - b)^2\mathrm{d}t$$
comme le carré de la distance à f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.
2. Grâce à une projection orthogonale bien choisie, calculer $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
On pose l'endormorphisme $u : P \mapsto (2X - 1)P' + (X^2 - X)P''$.

1. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = (RP')'$.
2. Montrer que u est auto-adjoint.