Ex. 3

1) Soit $P = X^3 - 1$. Alors $P(A) = A^3 - I_3 = 0$ donc P est annulateur de A. On a : $P = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Si on note Π_A le polynôme minimal de A alors $\Pi_A = X-1$ ou $\Pi_A = (X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$ ou $\Pi_A = P$.
Or A est symétrique réelle donc diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) donc Π_A est scindé à racines simples (dans $\mathbb{R}[X]$) donc $\Pi_A = X-1$ et donc $\mathrm{spec}(A) = \{1\}$

2) Comme $\Pi_A = X-1$ est annulateur de A, cela implique $A - I_3 = 0$ i.e. $A = I_3$

Variante n'utilisant pas Π_A directement : Sachant que $\mathrm{Spec}(A) = \{1\}$ et que A est diagonalisable, on en déduit que $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$ (et même $P \in O_3(\mathbb{R})$) telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale avec sur la diagonale uniquement des 1, autrement dit $P^{-1}AP = I_3$.
Par conséquent, $A = P I_3 P^{-1} = I_3$.

Ex. 2

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On voit que A est symétrique réelle donc le théorème spectral s'applique. Déterminons le polynôme caractéristique χ_A.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 1 & X & -1 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} X-1 & 1 & -1 \\ 1-X & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} (X-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-1)\begin{vmatrix} X+1 & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)((X+1)X - 2) = (X-1)(X^2+X-2) = (X-1)^2(X+2)$$

Ainsi $\mathrm{Spec}(A) = \{1, -2\}$ avec $m_1 = 2$ et $m_{-2} = 1$.

Calculons les espaces propres :

$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ On voit que : $C_1 - C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$
donc $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans E_1. Comme $\dim E_1 = m_1 = 2$ et que V_1 et V_2 sont linéairement indépendants, on a : $E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
Construisons une base orthogonale de E_1. On peut utiliser le procédé de G. S. : On garde V_1 et on pose $V_2' = V_2 - \frac{\langle V_2, V_1\rangle}{\langle V_1, V_1\rangle} V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ainsi la base $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$ de E_1 est orthogonale

En normalisant ces vecteurs, on obtient la base orthonormée de E_1 suivante : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

- Il reste à déterminer E_{-2} (qui est de dim 1).

$E_{-2} = \ker(A+2I) = \ker\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \ker\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\0&3&3\end{bmatrix}$ Une opération sur les lignes ne change pas le noyau

Dans cette matrice : $C_2 - C_3 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} = -C_1$ donc $C_1 + C_2 - C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \in E_{-2}$. Or $\dim E_{-2} = 1$ donc $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

Ce vecteur normalisé donne : $\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Finalement on pose $P = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\sqrt{3}/3 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$

et on obtient $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Ex. 5 L'affirmation est fausse car l'implication "$\Rightarrow$" est fausse en général comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit $A = \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Ici $\chi_A = \begin{vmatrix}X & 1\\-1 & X\end{vmatrix} = X^2+1$ donc χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas trigonalisable et donc pas diagonalisable.

Pourtant ${}^tA \times A$ est diagonalisable car symétrique réelle puisque :
${}^t({}^tA \times A) = {}^tA \times {}^{tt}A = {}^tA \times A$.

Ex. 6.

1) Soit $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ un vecteur-colonne.
Notons ${}^tXAX \in M_1(\mathbb{R})$ donc cette matrice est égale à sa transposée. Ainsi ${}^tXAX = {}^t({}^tXAX) = {}^tX.{}^tA.{}^{tt}X = {}^tX(-A)X$ car A est antisymétrique. On a donc ${}^tXAX = -{}^tXAX$ ie $2\,{}^tXAX = 0$ et donc ${}^tXAX = 0$

2) La matrice $A+S$ est carrée. Pour une telle matrice on a :
$\ker(A+S) = \{0\} \iff A+S$ est inversible
Montrons que $\ker(A+S) = \{0\}$.

Soit $X \in \ker(A+S)$ ie $(A+S)X = 0$.

Alors ${}^tX(A+S)X = 0$ donc ${}^tXAX + {}^tXSX = 0$

Par la question 1, ${}^tXAX = 0$ ce qui donne ${}^tXSX = 0$.

Or S est définie ce qui implique $X = 0$.