Devoir n° 2 — corrigé de l'analyse

Exercice 1

On va essayer d'utiliser la règle de D'Alembert. Celle-ci concerne les séries à termes strictement positifs, ce qui est le cas de u_n lorsque $b \neq 0$. Dans le cas où $b = 0$, on a $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$, et donc la série de terme général u_n est convergente.

Supposons maintenant $b \neq 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}b^{2n+2}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n b^{2n}} = 2b^2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 2b^2 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Par conséquent, si $2b^2 < 1$, la série de terme général u_n converge.

Au contraire, si $2b^2 > 1$, la série de terme général u_n diverge (grossièrement).

Maintenant, si $2b^2 = 1$, la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure. Mais dans ce cas, on a

$$u_n = \frac{(2b^2)^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de terme général u_n est alors une série de Riemann convergente.

Conclusion : la série de terme général u_n est convergente si et seulement si $2b^2 \leqslant 1$ (y compris $b = 0$), c'est-à-dire si seulement si $b \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Exercice 2

1. La série proposée vérifie le critère des séries alternées : il s'agit bien d'une série à signes alternés car $\ln n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$; par ailleurs, il est clair que la suite $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0. Cela suffit pour en conclure que la série de terme général u_n est convergente.

2. On peut par exemple remarquer que $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln^2 n}\right)$, puisque $\dfrac{\ln^2 n}{n} \to 0$ par croissances comparées. La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série de terme général v_n est divergente.

3. Effectuons un développement asymptotique de w_n :

$$\begin{aligned} w_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\ln n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{\ln^2 n} + o\left(\frac{1}{\ln^2 n}\right) \\ &= u_n - x_n, \end{aligned}$$

où $x_n = \dfrac{1}{\ln^2 n} + o\left(\dfrac{1}{\ln^2 n}\right) \sim \dfrac{1}{\ln^2 n} = v_n$. Cet équivalent montre déjà que $x_n \geqslant 0$ au moins à partir d'un certain rang (puisque v_n l'est). Par conséquent, on peut appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs : d'après la question 2, on en déduit que la série de terme général x_n diverge.

Or, comme la série de terme général u_n converge, on en conclut que celle de terme général w_n diverge (en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente).

Exercice 3

1. Comme $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$. En s'aidant d'un petit dessin comme fait en cours et en TD, on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant k^\alpha \leqslant \int_{k}^{k+1} x^\alpha \,\mathrm{d}x.$$

Soit $n \geqslant 1$ et sommons cet encadrement pour k allant de 1 jusqu'à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} x^\alpha \,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} x^\alpha \,\mathrm{d}x.$$

On simplifie les membres de droite et de gauche grâce à la propriété de Chasles :

$$\underbrace{\int_{0}^{n} x^\alpha \,\mathrm{d}x}_{a_n} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\int_{1}^{n+1} x^\alpha \,\mathrm{d}x}_{b_n}.$$

On calcule maintenant les intégrales trouvées (remarquez que ce sont les bonnes primitives car $\alpha \neq -1$) :

$$a_n = \int_0^n x^\alpha \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad ; \quad b_n = \int_1^{n+1} x^\alpha \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$$

On voit alors que

$$\frac{b_n}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha+1} - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \to 1 - 0 = 1.$$

Reprenons finalement l'encadrement de u_n et divisons-le par $a_n > 0$:

$$1 \leqslant \frac{u_n}{a_n} \leqslant \frac{b_n}{a_n}.$$

Le membre de droite tend vers 1, donc d'après le théorème d'encadrement, on a $\dfrac{u_n}{a_n} \to 1$. Autrement dit,

$$u_n \sim a_n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

2. On en déduit directement que $v_n \sim \dfrac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$. C'est une série de Riemann convergente, puisque $\alpha+1>1$ (on a supposé $\alpha > 0$). Par théorème de comparaison des séries à termes positifs (c'est bien le cas de v_n et de $\dfrac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$), on en conclut que la série de terme général v_n est convergente.

Exercice 4

1. D'après le cours, comme $u_n > 0$, la divergence de la série de terme général u_n signifie que la suite des sommes partielles associée n'est pas majorée. La suite (S_n) est donc croissante (car $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$) et non majorée, donc $S_n \to +\infty$.

2. La série de terme général $d_n = a_n - a_{n-1}$ est une série téléscopique. Le cours nous dit qu'elle converge si et seulement si la suite (a_n) a une limite finie. Or, d'après la question précédente, on a $a_n = \ln S_n \to +\infty$, de sorte que la série de terme général d_n est divergente.

3. On fait le calcul, en utilisant le fait que $S_n = S_{n-1} + u_n$:

$$d_n = \ln S_n - \ln S_{n-1} = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = -\ln \frac{S_{n-1}}{S_n} = -\ln \frac{S_n - u_n}{S_n} = -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right).$$

4. Si $\dfrac{u_n}{S_n} \not\to 0$, la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n}$ est grossièrement divergente. Dans le cas contraire, on a

$$\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \sim -\frac{u_n}{S_n}, \quad \text{et donc} \quad d_n \sim \frac{u_n}{S_n}.$$

D'après la question 2 et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que là encore, la série de terme général $\dfrac{u_n}{S_n}$ est divergente.

Remarque : Posons $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$. *On a alors* $v_n = o(u_n)$. *Autrement dit, étant donnée une série divergente* $\sum u_n$ *à termes strictement positifs, on a construit un nouvelle série dont le terme général* v_n *est négligeable devant* u_n *mais qui est encore divergente !*