Feuille d'exercices n° 3 : espaces stables - valeurs et vecteurs propres et polyn. caractéristique

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $e = (1,0,1)$, $f = (1,1,1)$ et u l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $u(e)$, $u(f)$ et $u^2(f)$.
2. On note $E = \mathrm{Vect}(e)$ et $F = \mathrm{Vect}(f, u(f))$. Montrer que E et F sont stables par u. Expliciter la matrice de l'endomorphisme $u_{|E}$ dans la base (e) de E puis celle de $u_{|F}$ dans la base $(f, u(f))$ de F. Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires ? La famille $(e, f, u(f))$ constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. (a) Pour x, y et z réels, quelle est l'image par u du vecteur $xe + yf + zu(f)$?
   (b) En déduire que E est la seule droite stable par u.
   (c) Soit P un plan stable par u. Montrer que $F \cap P$ est stable par u, et en déduire que $P = F$.
   (d) Quels sont les sous-espaces stables par u ?

Exercice 2. 1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent et soit a, b et c trois nombres complexes. Montrer que $\mathrm{Ker}(au^2 + bu + c\,\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(au^2 + bu + c\,\mathrm{Id})$ sont stables par u et par v.

2. Donner un exemple d'un espace vectoriel E, de deux endomorphismes u et v qui commutent et d'un sous-espace F de E qui soit stable par u mais ne soit pas stable par v.

Exercice 3. On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout polynôme P.

1. Soit $S \subset \mathbb{R}[X]$ un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par D et non réduit à $\{0\}$.
   (a) Soit P un élément non nul de S, de degré d. En considérant la famille $(P, P', P'', \ldots, P^{(d)})$, montrer que $\mathbb{R}_d[X] \subset S$.
   (b) On suppose l'ensemble $\{\deg P \mid P \in S\}$ majoré, et on note $d = \max\{\deg P \mid P \in S\}$. Montrer que $S = \mathbb{R}_d[X]$.
   (c) On suppose l'ensemble $\{\deg P \mid P \in S\}$ non majoré. Montrer que $S = \mathbb{R}[X]$.
2. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ stables par D ?

Exercice 4. On note σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\sigma(P) = XP$ pour tout polynôme P.

1. Montrer que $\{0\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ.
2. Soit $S \subset \mathbb{R}[X]$ un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par σ et non réduit à $\{0\}$.
   (a) Justifier pourquoi on peut choisir un polynôme A de degré minimal dans $S \setminus \{0\}$.
   (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $QA \in S$.
   (c) Soit $B \in S$. En effectuant la division euclidienne de B par A, montrer que A divise B.
3. Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{R}[X]$ stables par σ ?

Exercice 5. Déterminer le polynôme caractéristique, le spectre et les sous-espaces propres de chacune des matrices suivantes, que l'on considérera successivement comme matrices réelles puis complexes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}5&0&1\\1&1&0\\-7&1&0\end{pmatrix}\quad;\quad E=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\quad;\quad F=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Étant donné un polynôme unitaire $X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$, sa "matrice compagnon" est la matrice

$$\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\dots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Montrer que tous les espaces propres d'une matrice compagnon sont des droites.

Exercice 7. Déterminer le spectre et les espaces propres des endomorphismes suivants :

1. L'endomorphisme u_1 de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $u_3(f)=f''$.
2. L'endomorphisme u_2 de $\mathscr{C}^\infty_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, espace des fonctions infiniment dérivables et 2π-périodiques, défini par $u_4(f)=f''$.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit u un endomorphisme de E de rang 1.

1. On note v la restriction de u à $\ker u$. Que vaut χ_v ? En déduire qu'il existe un et un seul réel α tel que $\chi_u=X^{n-1}(X-\alpha)$.
2. Montrer que $u\circ u=\alpha u$.
3. Dans cette question, on suppose que $E=\mathbb{R}^n$ et que u est l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique ne comporte que des 1. Que vaut χ_u ? Étant donnés deux réels a et b, que vaut le déterminant de la matrice carrée $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux valent b et tous les autres valent a ?

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n, soit α un réel et soit $u\in\mathscr{L}(E)$ vérifiant l'égalité $u\circ u=\alpha u$.

1. Rappeler la démonstration du fait "bien connu" suivant : si $p\in\mathcal{L}(E)$ vérifie $p\circ p=p$, alors $\ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans E et p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\ker p$.

   Indication : pour tout $x\in E$, on peut écrire $x=(x-p(x))+p(x)$.
2. Dans cette question, on suppose que $\alpha\neq 0$. En posant $p=\dfrac{1}{\alpha}u$, montrer que le spectre de u possède au plus deux éléments, que le polynôme caractéristique de u est scindé et que la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée dans le polynôme caractéristique.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha=0$. Déterminer le polynôme caractéristique de u.

   Indication : on pourra considérer une matrice A de u dans une base quelconque de E et montrer que si A possède une valeur propre, elle est nécessairement nulle.

Exercice 10. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un sous-espace non trivial de $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire ni égal à $\{0\}$, ni égal à $\mathbb{C}^n$) qui est stable par tous les endomorphismes qui commutent avec u.
2. Soit $u\in\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$ qui commute avec tous les éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. En utilisant la question 1, montrer que u est une homothétie.
3. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, puis en déduire que A est une matrice scalaire, c'est-à-dire une matrice de la forme λI_n, avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
4. Le résultat de la question 2 reste-t-il vrai si l'on y remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$? Et pour la question 1 ?