Exercice 3.

1. Question de cours.

   Soit E un espace euclidien et s un endomorphisme de E. On suppose que s est une symétrie (i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_E$) et que s est un endomorphisme orthogonal.

   Montrer que les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de s sont orthogonaux et conclure que s est une symétrie orthogonale.

2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 que l'on munit du produit scalaire défini par :

   $$\forall\, P, Q \in E, \quad \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

   On considère les deux endomorphismes u et v de E définis par :

   $$\forall\, P \in E, \quad u(P) = P(1-X) \quad \text{et} \quad v(P) = P(X-1).$$

   (a) Montrer que u est une symétrie orthogonale. Déterminer une base de l'espace par rapport auquel on symétrise.

   (b) Calculer $\langle v(1), v(X)\rangle$ et en déduire que l'endomorphisme v n'est pas orthogonal.

   (c) A l'aide d'un calcul similaire, montrer que v n'est pas autoadjoint.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un nombre impair. Trouver toutes les matrices *symétriques* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^k = I_n$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^tMM = I_n$.

   (a) Montrer que la matrice ${}^tMM$ est symétrique.

   (b) Montrer que M est symétrique (on rappelle que, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$).

   (c) En déduire que $M = I_n$.

Partie algèbre.

Exercice 3

1) Montrons que $E_1 \perp E_{-1}$: soient $x \in E_1$ et $y \in E_{-1}$.

Alors $s(x) = x$ et $s(y) = -y$. Par conséquent

$< x , y > = < s(x), -s(y) > = - < s(x), s(y) > = - < x, y >$ la dernière égalité provenant du fait que s est orthogonal.

Finalement $<x,y> = -<x,y>$ ce qui implique $<x,y> = 0$

Par hypothèse $s^2 = Id_E$ donc $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ est annulateur de s et donc s est diagonalisable avec $\mathrm{spec}(s) \subseteq \{-1, 1\}$.

On a donc $E = E_1 \oplus E_{-1}$ avec éventuellement $E_1 = \{0\}$ ou $E_{-1} = \{0\}$

Montrons pour finir que s est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1} ce qui montrer que s est une symétrie orthogonale puisque $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}$

Soit $x \in E$. Il s'écrit de façon unique $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_{-1}$

On a $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$ d'où la conclusion.

2)(a) Via la question, il suffit de montrer que u satisfait $u^2 = Id_E$ et que u est orthogonal.

- Soit $P \in E$. $u(P) = P(1-X)$ et $u(u(P)) = P(1-(1-X)) = P$

  Ainsi $u^2 = Id_E$.

- Soient $P, Q \in E$. Montrons que $< u(P), u(Q) > = < P, Q >$.

  $<u(P), u(Q)> = \int_0^1 P(1-t)\,Q(1-t)\,dt$. On effectue le changement de variable $s = 1-t$ ce qui donne $dt = -ds$. De plus $s=0$ si $t=1$ et $s=1$ si $t=0$ d'où $<u(P), u(Q)> = \int_1^0 P(s)\,Q(s)\,(-ds) = \int_0^1 P(s)\,Q(s)\,ds$

  $= < P , Q >$.

Par la question 1, on peut conclure que u est une symétrie orthog. (par rapport à E_1 parallèlement à $E_1^\perp = E_{-1}$).

- Déterminons une base de E_1

  Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a $u(P) = a(1-X)^2 + b(1-X) + c$

  $= aX^2 - 2aX + a + b - bX + c$

$= aX^2 + (-2a-b)X + a+b+c$

Ainsi : $P \in E_1 \iff u(P) = P \iff \begin{cases} b = -2a-b \\ c = a+b+c \end{cases} \iff \begin{cases} 2b = -2a \\ 0 = a+b \end{cases} \iff b = -a$

$\iff P = aX^2 - aX + c = a(X^2 - X) + c.1$

On en déduit que $E_1 = \text{vect}\{X^2 - X, 1\}$.

(b) $\langle v(1), v(X) \rangle = \langle 1, X-1 \rangle = \int_0^1 t-1 \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$

De plus $\langle 1, X \rangle = \int_0^1 t \, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Ainsi $\langle v(1), v(X) \rangle \neq \langle 1, X \rangle$ ce qui montre que v n'est pas orthogonal.

(c) Montrons que $\langle v(1), X \rangle \neq \langle 1, v(X) \rangle$ et cela montrera que v n'est pas autoadjoint

$\langle v(1), X \rangle = \langle 1, X \rangle = \frac{1}{2}$ (calcul ci-dessus)

$\langle 1, v(X) \rangle = \langle 1, X-1 \rangle = -\frac{1}{2}$ (Idem)

D'où la conclusion.

Exercice 4 1) Montrons que : $A^k = I_n \iff A = I_n$

L'implication $\Leftarrow$ est triviale. Soit donc $A \in M_n$ t.q $A^k = I_n$.

Par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et il existe D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On a $D^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = P^{-1}I_nP = P^{-1}P$
$= I_n$

Les coefficients diagonaux de D satisfont $x^k = 1$ mais k étant impaire cela entraine $x = 1$. Ainsi $D = I_n$

D'où $A = PDP^{-1} = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n$

2) (a) ${}^t({}^tM.M) = {}^tM.{}^{tt}M = {}^tM.M$

(b) Par hypothèse $M.{}^tM.M = I_n$ donc $\det(M)^3 = 1$ d'où M inversible. D'où $M^{-1} = {}^tM.M$

Par (a) M^{-1} est symétrique. On a alors ${}^tM = {}^t((M^{-1})^{-1}) = ({}^t(M^{-1}))^{-1}$
$= (M^{-1})^{-1} = M$

3) La symétrie de M et l'égalité $M{}^tMM = I_n$ entrainent $M^3 = I_n$

Par la question 1, on peut conclure que $M = I_n$.