Exercice 3
1) Plusieurs solutions sont possibles, une des plus ronronnantes est de passer en polaires, autrement dit de poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Avec cette notation, l'expression à étudier se réécrit :

$$\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta.$$

En majorant le cosinus et le sinus par 1 en valeur absolue, on obtient aussitôt l'encadrement :

$$-r \leq \frac{x^2y}{x^2+y^2} \leq r$$

et on conclut en appelant au secours le théorème des gendarmes.
2) Là plus de polaires possibles, il est quand même confortable de poser $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On remarque alors que pour tout (x, y, z), $|x| = \sqrt{x^2} \leq r$, inégalité à laquelle on peut appliquer la puissance a (croissante puisqu'on a supposé a positif) pour écrire que $|x|^a \leq r^a$. On en fait de même avec y et z et on obtient :

$$0 \leq \frac{|x|^a|y|^b|z|^c}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{r^{a+b+c}}{r^2} = r^{a+b+c-2}.$$

Ici le gendarme de droite tend vers zéro quand (x, y, z) tend vers zéro parce qu'on a supposé $a+b+c-2 > 0$, et l'expression encadrée aussi, par conséquent.

Exercice 4
1) Plusieurs façons de faire. On peut passer en polaires (il apparaît un $r^2\left(1-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)$ dont la non-annulation découle directement de la majoration $\sin(2\theta) \leq 1$). On peut aussi utiliser la "forme canonique" d'un polynôme du deuxième degré : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,f

$$x^2+xy+y^2 = \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

et si cette quantité s'annule c'est que les deux carrés sommés sont nuls, on trouve d'abord que $y = 0$ puis que $x = 0$: sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, le dénominateur de la formule qui définit g_a ne s'annule donc pas.
2) On paramètre la droite proposée par (t, mt), t réel ; c'est quand $t \to 0$ que $(x, y) \to (0, 0)$ en évoluant sur cette droite.
On calcule alors, pour t non nul :

$$g_a(t, mt) = \frac{t^2(1+am+m^2)}{t^2(1+m+m^2)} = \frac{1+am+m^2}{1+m+m^2}$$

qui a une limite évidente quand tend vers 0, puisqu'il s'agit d'une fonction constante. Cette limite est la valeur de la fonction, c'est-à-dire $\dfrac{1+am+m^2}{1+m+m^2}$.
3) Ici le paramétrage approprié est $(0, t)$ puis, pour t non nul :

$$g_a(0,t) = \frac{t^2}{t^2} = 1$$

comme au 2) cette fonction constante tend vers sa valeur, ici 1 quand t tend vers zéro.
4) * 1er cas : supposons $a = 1$. Alors la fonction g_a est identiquement égale à 1, donc se prolonge de façon évidente en une fonction continue : la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.
* 2nd cas : supposons $a \neq 1$ et supposons que g_a admette un prolongement continu. Notons $l = g_a(0, 0)$. Alors $g_a(0, t)$ tend vers l quand t tend vers 0, et donc vu le 3, $l = 1$. Par ailleurs $g_a(t, t)$ aussi tend vers l donc $l = \dfrac{2+a}{3}$ (par application à $m = 1$ de la formule trouvée au 2)). On conclut que $\dfrac{2+a}{3} = 1$, donc $2 + a = 3$, donc $a = 1$ ce qui est absurde. La fonction g_a n'admettait donc pas de prolongement continu à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5

f_1 n'est **pas** bornée. En effet, pour t réel tendant vers l'infini,

$$f_1(t,0) = t^2 \to +\infty.$$

f_2 **est** bornée. À titre de lemme préparatoire, étudions la fonction d'une variable réelle φ définie par $\varphi(t) = te^{-t}$ sur $[0, +\infty[$. Cette fonction tend vers 0 à l'infini donc il existe un A telle qu'elle soit bornée par 1 sur $[A, +\infty[$; par ailleurs elle est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, A]$ donc bornée sur cet intervalle. En mettant bout à bout ces deux informations, on conclut que φ est bornée sur $[0, +\infty[$. (Une autre méthode, tout aussi valable, pour borner φ serait de la dériver puis d'établir son tableau de variations). Notons M une borne pour φ.
Ce préliminaire étant posé, on peut alors écrire pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$ l'encadrement :

$$0 \leq x^2 e^{-x^2-y^2} = \varphi(x^2)e^{-y^2} \leq M \times 1 = M.$$

Exercice 6

1) Soit c et d dans $\mathbb{R}^2$, en leur appliquant l'hypothèse posée sur f, on peut écrire :

$$f(c) - f(d) \leq |f(c) - f(d)| \leq 4\|c - d\| = 4\|d - c\|.$$

Il n'y a plus qu'à ajouter $f(d)$ et soustraire $4\|d - c\|$ à l'inégalité qu'on vient d'écrire.

2) Notons U l'ensemble à étudier, et soit c un point de U. Ainsi $0 < f(c)$. Posons $r = \dfrac{f(c)}{4}$, qui est un nombre strictement positif, et vérifions que la boule ouverte de centre c et de rayon r est incluse dans U. Soit d un point de cette boule, ainsi $\|d-c\| < r$ donc $-4\|d-c\| \geq -4r = -f(c)$. L'inégalité du 1) fournit alors $f(d) > f(c)-f(c) = 0$ et on conclut que $d \in U$.
Ainsi, autour de tout point de U on sait construire une boule ouverte centrée en ce point et incluse dans U : c'est précisément dire que U est ouvert.