Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 4

Endomorphismes d'un espace euclidien : adjoints et théorème spectral

---

I. Manipulations de l'adjoint

Exercice 1. Soit E un espace euclidien. On dit qu'un endomorphisme u de E est non-expansif lorsque pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Soit u un endomorphisme non expansif de E.

1. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $|\langle y, u^\star(x)\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
2. En déduire que $u^\star$ est lui-aussi non expansif.
3. Montrer l'inclusion :$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u^\star - \mathrm{Id})$.
   Indication : on pourra partir d'un élément $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et chercher à démontrer que $\|u^\star(x) - x\| = 0$.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux.
5. Quels sont les endomorphismes non-expansifs dont la décomposition de Dunford est de la forme $\mathrm{Id} + n$ avec n nilpotent ?

II. Utilisation du théorème spectral

Exercice 2. Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \geq 2$ tel que $A^k = I$ (où I désigne la matrice identité).

1. Montrer que $A^2 = I$ puis que A est orthogonale.
2. Que peut-on dire d'un endomorphisme d'un espace euclidien dont la matrice est A dans une base orthonormée ?

Exercice 3. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est symétrique.

Exercice 4. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Démontrer que

1. S est positive si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$,
2. S est définie positive si et seulement si son spectre est inclus dans $]0; +\infty[$.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que sur l'ensemble des matrices symétriques positives, l'application $A \longmapsto A^k$ est injective.

2. L'est-elle sur l'espace des matrices symétriques ?

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à $[-1;1]$.
2. Soient $A \in S_n+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$. Comparer $\mathrm{Tr}(AU)$ et $\mathrm{Tr}(UA)$ à $\mathrm{Tr}(A)$.

III. Intervention de $u^\star \circ u$ ou de ${}^tAA$

Exercice 7. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer les équivalences suivantes.

1. B est symétrique positive si et seulement si il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$,
2. B est symétrique définie positive si et seulement si il existe $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$.

Exercice 8. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A énumérées avec multiplicité. Montrer l'identité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2.$$

Exercice 9. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui diagonalise $u^\star \circ u$.
2. Montrer que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est orthogonale.
3. On suppose dans cette question que u est bijectif. Montrer que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthogonale de E puis déterminer une base orthonormée de E.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux matrices U et V orthogonales telles que UMV est diagonale.
   Indication : on pensera à utiliser la formule de changement de bases (pour des bases différentes au départ ainsi qu'à l'arrivée).
5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.
   (a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont M est la matrice dans la base canonique. La famille trouvée à la question 2 est-elle une base ?
   (b) Construire à l'aide de cette famille une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus (\mathrm{Im}(u))^\perp$.
   (c) Montrer que le résultat de la question 4 est encore vrai.

Exercice 10. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Montrer que u est non-expansif si et seulement si toutes les valeurs propres de $u^\star \circ u$ sont dans $[0;1]$.