Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 6

Géométrie affine

Exercice 1. Soit $R = (0, i, j, k)$ un repère d'un espace affine (de dimension 3). Soient A et B les points de coordonnées respectives $(0, -1, 2)$ et $(1, 1, 1)$ dans ce repère. On note R_1 le repère (A, i, j, k) et R_2 le repère $(B, -k, -i, j)$. Exprimer les coordonnées d'un point M dans le repère R_2 en fonction de celles dans le repère R_1.

Exercice 2. Dans un plan euclidien muni d'un repère (O, i, j), on considère le triangle ABC limité par les trois droites d'équations respectives $2x - y + 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$ et $2x + y - 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points du plan dont les trois projections orthogonales sur ces droites sont alignées.

Exercice 3. On considère la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son centre, son rapport et son angle.
2. On considère dans le plan complexe les points A d'affixe i, B d'affixe -1 et C d'affixe $-i$.
   (a) Déterminer les points A', B' et C', images respectives de A, B et C par la similitude s.
   (b) Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{A'B'C'}$? de la longueur $A'C'$? de l'aire du triangle $A'B'C'$?

Exercice 4. Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on fixe trois points O, A, B non alignés. À tout point M du plan distinct de O, A et B, on associe les points $P \in (OA)$ et $Q \in (OB)$ tels que $OPMQ$ est un parallélogramme. On suppose que les droites (AQ) et (BP) sont sécantes en M'. Montrer que les droites (MM') passent toutes par un certain point que l'on déterminera.

Exercice 5. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la droite D_λ d'équation

$$(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2.$$

Montrer que les droites D_λ sont toutes tangentes à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.
Indication : avec quelques valeurs particulières de λ, on trouvera le cercle puis on déterminera la distance entre le centre du cercle et D_λ.

Exercice 6. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soit $\mathcal{P}$ un plan de E et $A \in E$ un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite non (faiblement) parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par A.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ s'intersectent en un point.

Exercice 7. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine de dimension 3. Soit (u, v, w) une base de $\overrightarrow{E}$, A un point de E et $\mathcal{D}$ la droite passant par A et dirigée par u.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons M_λ le point $A + w + \lambda v$. Montrer qu'il existe un unique plan passant par M_λ et contenant D. On le notera $\mathcal{P}_\lambda$.
2. Montrer que lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}_\lambda$ décrit tous les plans contenant $\mathcal{D}$ sauf un. On le note $\mathcal{P}_\infty$. Déterminer la direction de $\mathcal{P}_\infty$ en fonction de u, v, w.

Exercice 8. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace euclidien. Soient $A, B \in E$ deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M de E tels que $(AM) \perp (BM)$. *On pensera à utiliser le milieu du segment* $[AB]$.

Exercice 9. Soient $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{F}$ deux espaces vectoriels, $u : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire et $y_0 \in \overrightarrow{F}$. Montrer que l'ensemble (s'il n'est pas vide) des $x \in \overrightarrow{E}$ tels que $u(x) = y_0$ est un espace affine dont on donnera la direction.

Exercice 10. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien.

1. Soit $\overrightarrow{H}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Montrer que $\overrightarrow{H}$ est un hyperplan si et s. si il existe $v \in E \setminus \{0\}$ tel que $\overrightarrow{H} = \{x \in E \mid \langle x, v \rangle = 0\}$.
2. Soit H un sous-espace affine de E. Montrer que H est un hyperplan si et s. si il existe $O \in H$ et il existe $A \in E \setminus H$ tel que $H = \{M \in E \mid (OM) \perp (OA)\}$.

Exercice 11. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien. Soient A et B deux points de E. Montrer que l'ensemble des points M équidistants de A et B est l'hyperplan affine $H = I + (\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{AB}\})^\perp$ où I est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 12. Soit $(P, \overrightarrow{P})$ un plan affine. Une dilatation est une application $f : P \to P$ telle que pour toute droite Δ, il existe une droite Δ' parallèle à Δ telle que $f(\Delta) \subseteq \Delta'$.

1. Soient A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$. Montrer qu'il existe au plus une dilatation f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
2. Montrer qu'une dilatation est soit constante soit bijective.

Exercice 13.

1. Soit n un entier naturel non nul. On considère $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \dots B_n)$ deux familles de n points du plan dont on note respectivement G et H les isobarycentres.
   Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iB_i} = n\overrightarrow{GH}$.
2. (a) Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB).
   (b) Montrer que si les points A, B, C ne sont pas alignés, tout point du plan est barycentre de ces trois points.

Exercice 14. Soient A, B, C, D quatre points du plan affine $\mathcal{E}$. On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs de AB, AC, AD, BC, CD, DE. On note aussi E, F, G, H les isobarycentres respectifs des points (B, C, D), (A, C, D), (A, B, D) et (A, B, C). Montrer que les droites (IM), (JN), (KL), (AE), (BF), (CG) et (DH) sont concourantes.
Indication : utiliser la propriété d'associativité des barycentres.

Exercice 15. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). le barycentre G de toute famille finie $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)\}$ de points pondérés de C tels que $\lambda_i \geq 0$ pour tout i et $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, appartient à C,
   (ii). $\forall M, N \in C$, $[MN] = \{M + \lambda\overrightarrow{MN} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset C$.

   Une partie vérifiant les conditions précédentes est dite convexe.
2. Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$. Soit $P \in C$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i). $\forall M, N \in C,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1/2), (N, 1/2)) \Rightarrow M = P = N$,
   (ii). $\forall M, N \in C,\ \forall \lambda \in]0; 1[,\ P = \mathrm{Bar}((M, 1-\lambda), (N, \lambda)) \Rightarrow M = P = N$,
   (iii). Le complémentaire C_0 de $\{P\}$ dans C est convexe.

   Un tel point P de la partie convexe C, qui ne peut être isobarycentre de deux points distincts de C est appelé point extrémal de C.

Exercice 16.

1. On se place dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient D une droite affine d'équation $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan.
   (a) On note $H(x, y)$ la projection orthogonale de M_0 sur D. Déterminer les coordonnées de H.
   (b) En déduire la formule donnant la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (en fonction de a, b, c, x_0 et y_0).
2. On se place désormais dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Soient P un plan affine d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.
   (a) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale $H(x, y, z)$ du point M_0 sur P.
   (b) En déduire la distance du point M_0 au plan P.

Exercice 17.

1. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on considère les points $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ et $C(2, -1, 3)$. Déterminer les points D situés sur la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$ tels que $ABCD$ est un tétraèdre de volume égal à 5.