Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre de printemps 2018-2019

Math IV - Cursus préparatoire 2A — Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 1.

1. Déterminer le rayon de convergence ainsi que le domaine de convergence des séries entières réelles suivantes.
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin(\frac{1}{n})\right)^n x^n$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2^n n^2} x^{4n+1}$
   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt{n}} x^n$
2. Calculer le rayon de convergence R et la somme S de la série entière suivante sur $]-R,R[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \tag{E}$$

avec $y(0) = 1$.

On suppose que cette équation admet une solution y développable en série entière dans un intervalle $]-R,R[$ où R est un réel strictement positif. On écrit alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Calculer a_0.
2. Calculer a_1 et trouver une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} pour tout $n \geq 1$. Déduire a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le développement de y.
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série obtenue. Est-ce que y est bien une solution de (E) ?

   Exprimer y à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
Notons $u \in E$ la fonction constante égale à 1 et $G = \text{Vect}\{u\}$.
On considère l'espace vectoriel $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. Soit $f \in E$. Montrer que $f - f(0)u \in H$.
2. En utilisant la question 1, montrer que $E = H \oplus G$.
3. Soit $f \in H^\perp$ et soit $h \in E$ définie par $h(t) = tf(t)$.
   (a) Montrer que $\langle h, h\rangle = 0$.
   (b) En déduire que $f = 0_E$.
4. A-t-on $E = H \oplus H^\perp$?

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier.
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par : $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$.
Notons $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace vectoriel des polynômes $f \in E$ qui sont pairs (resp. impairs) ;
ainsi on a $\mathcal{P} = \{f \in E \mid f(-X) = f(X)\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E \mid f(-X) = -f(X)\}$.

1. Montrer que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ (on pourra procéder par analyse-synthèse).
2. Montrer que pour tout $(f, g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, $\langle f, g\rangle = 0$ (on pensera à un changement de variable bien choisi).
3. En déduire que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ et que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^\perp$.
4. Soit $f \in E$ défini par $f(X) = 2X + 3$. Déterminer $d(f, \mathcal{P})$ (on pourra bien entendu utiliser $p_{\mathcal{P}}(f)$ ou $p_{\mathcal{I}}(f)$.)