2. Du même genre que le précédent sans calcul de P_A. On prend $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $A - I$ et $A + I$ sont de rang 2 et la trace nous donne l'autre valeur propre d'où $P_A = (X-1)^2(X+1)$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Aide mémoire : $C_1 + C_2 \to C_1$, puis $X - 1$ en facteur, puis $L_2 - L_1 \to L_2$ et on développe ce qui donne $P_A = (X-1)^3$ et on a $E_1 = \mathrm{Vect}\{{}^t(1\ 1\ 0)\}$.
On pose $b_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$. On cherche b_2 t.q. $(A - I)b_2 = \alpha b_1$ avec b_2 qui s'écrit comme combinaison de v_2, v_3. On trouve (par exemple) $b_2 = (0,-2,1)$. Ensuite, on prend b_3 quelconque pour que les b_i forment une base.

4.3.7 Nilpotence

E : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 4.61. Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0$.
Le plus petit entier p tel que $u^p = 0$ est appelé l'indice de nilpotence de u.

Proposition 4.62. Pour un endomorphisme nilpotent, 0 est une valeur propre et c'est la seule.

Démonstration. Si λ est une valeur propre et x un vecteur propre associé alors $u^p(x) = \lambda^p x = 0$ d'où $\lambda = 0$, ce qui donne l'unicité. Voyons l'existence. Si $u = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon soit p son degré de nilpotence. Alors $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$ et cet élément est dans le noyau de u. Ainsi $\ker(u) \neq 0$, i.e. $E_0 \neq 0$ et 0 est bien une valeur propre. $\square$

Proposition 4.63. On suppose que E est de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. u est nilpotent.
2. Il existe une base de E pour laquelle la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
3. $P_u = X^n$.

Démonstration. L'équivalence (2) $\iff$ (3) est triviale. Par calcul, on montre que toute matrice de la forme donnée dans (2) est nilpotente (exercice) d'où (2) $\Rightarrow$ (1). Il reste à montrer l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). On va simplement montrer que si u est nilpotent alors il est trigonalisable et d'après la remarque précédente, la diagonale de la matrice obtenue ne contiendra que des 0 ce qui donnera bien (2).
On va montrer que u nilpotent implique u trigonalisable par récurrence sur la dimension n. Si $n = 1$, il n'y a rien à faire. Regardons le passage de $n-1$ à n. Comme u est nilpotent, u admet 0 comme valeur propre. Soit $b_1 \in \ker(u)$ un vecteur propre. Soit $F = \mathrm{Vect}\{b_1\}$ et G un supplémentaire de F dans E. Soit $w : G \to G$ définie par $w(x) = g$ où $x = f + g$ avec $f \in F$, $g \in G$.
Montrons que pour tout $k \geq 1$, et pour tout $x \in G$, $u^k(x) - w^k(x) \in F$.
On a $u(x) = f + g = f + w(x)$ avec $f \in F$ donc l'assertion est vraie pour $k = 1$.
Supposons que ce soit vrai pour k, i.e. $u^k(x) = f + w^k(x)$ avec $f \in F$. Alors $u^{k+1}(x) = u(f) + u(w^k(x)) =$

$u(w^k(x)) = f' + w^{k+1}(x)$ avec $f' \in F$.
Si k est le degré de nilpotence de u alors u^k est nul ce qui entraîne, pour $x \in G$, que $w^k(x) \in F$ mais comme $F \cap G = \{0\}$, cela entraîne $w^k(x) = 0$. Ainsi w est nilpotent. Soit alors $\mathcal{B}' = (b_2, \ldots, b_n)$ une base de G telle que $M_{\mathcal{B}'}(w)$ soit triangulaire. Dans la base $(b_1, \ldots, b_n)$, la matrice de u est alors triangulaire. □

5 Polynôme minimal et projecteurs spectraux

Sauf mention contraire E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (de dimension finie ou non) et u désigne un endomorphisme de E.

5.1 Polynôme d'endomorphisme et de matrice

Définition 5.1. Soit $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme donné.

1. On définit $P(u) = a_d u^d + \cdots a_1 u + a_0 \mathrm{Id}_E$. C'est un endomorphisme de E.
   Ici $u^k = u \circ \cdots \circ u$ (u apparaissant k fois).
2. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on définit $P(A) = a_d A^d + \cdots a_1 A + a_0 I_n$.

$P(u)$ est l'évaluation de P en u ; idem pour $P(A)$.

Attention à bien mettre Id_E et I_n sinon ça donne ...

Proposition 5.2. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

1. $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$,
2. $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$,
3. $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Démonstration. Ok pour (1) et (2). Pour (3), on le fait pour P et Q égaux à des monômes et on utilise (1) et (2). □

Définition 5.3. Soit v un endomorphisme de E. On dit que v est un polynôme en u si il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.
On note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u, i.e. $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Proposition 5.4. L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est stable par $+$, $\circ$ et multiplication par un scalaire.

Remarque 5.5. On a les mêmes choses avec une matrice donnée $A \in M_n(\mathbb{K})$.
Les mêmes propriétés que dans la prop. 5.2 et $\mathbb{K}[A]$ est aussi stable par....

5.2 Polynôme annulateur

Définition 5.6. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est annulateur de u si $P(u) = 0_{\mathrm{End}(E)}$.
Idem avec $A \in M_n(\mathbb{K})$...

Exemple 5.7.
1. Le polynôme nul est annulateur de tout endomorphisme et de toute matrice.
2. Si u est un projecteur, i.e. $u^2 = u$, alors $X^2 - X$ est annulateur de u.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $P = X^2 - 5X - 2$. Alors $P(A) = 0$.

4. Plus généralement si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors le polynôme $P = X^2 - (a+d)X + ad - bc = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + det(A)$ est annulateur de A.

Lemme 5.8. Soit $A, Q \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P(Q^{-1} \cdot A \cdot Q) = Q^{-1} \cdot P(A) \cdot Q$

Démonstration. ok. $\square$

Corollaire 5.9. Si A et B sont deux matrices semblables et si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors P est annulateur de A si et s. si P annulateur de B.

Démonstration. ok. $\square$

Théorème 5.10 (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** Ici on suppose que $\dim(E)$ est finie égale à n. Le polynôme caractéristique de u, P_u, est annulateur de u, i.e. $P_u(u) = 0$.
On a le même résultat pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$: $P_A(A) = 0$.

Démonstration. Le but : montrer que pour tout $x \in E$, $P_u(u)(x) = 0$. Soit donc $x \in E$. Si $x = 0$ alors c'est trivial ; on suppose donc $x \neq 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x)\}$ est libre et $\{x, u(x), u^2(x), \dots, u^p(x)$ est liée. On peut alors écrire $u_p(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x)$.
On complète la famille libre en une base $\mathcal{B}$ de E. Dans cette base la matrice M de u est triangulaire par blocs $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0 & M_3 \end{pmatrix}$ (écrire en détails la matrice...).
Soit $Q(X) = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_0$. La matrice M_1 est la matrice compagnon de Q donc $P_{M_1} = Q$.
De plus, $P_u = P_M = P_{M_1} \cdot P_{M_3} = Q \cdot P_{M_3}$. On obtient alors $P_u(u)(x) = P_{M_3}(u)(Q(u)(x)) = P_{M_3}(u)(0) = 0$. $\square$

5.3 Polynôme minimal

Dans ce paragraphe E est supposé de dimension finie n et u est toujours un endo de E.

Proposition 5.11 (Proposition-Définition)**.** On suppose que u est un endomorphisme non nul. Il existe un unique polynôme $m \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

1. m est non nul et unitaire,
2. m est annulateur de u,
3. Pour tout polynôme P annulateur de u, on a $\deg(m) \leq \deg(P)$.

Ce polynôme m est appelé le polynôme minimal de u est noté m_u.

Démonstration. Concernant l'existence, on considère l'ensemble des polynômes non nuls, annulateurs de u et qui soient unitaires. Cet ensemble est non vide par Cayley-Hamilton. Dans cet ensemble, on prend un polynôme dont le degré est minimal et on appelle m ce polynôme.
Voyons l'unicité. Soient m_1 et m_2 deux tels polynômes et supposons que $m_1 \neq m_2$. Ainsi, $m_1 - m_2$ est encore annulateur de u et son degré est $< \deg(m)$ (il suffit de le normaliser pour qu'il soit unitaire) ce qui donne une absurdité. $\square$

Corollaire 5.12. On suppose u non nul. Alors m_u divise tout autre polynôme annulateur de u.

Démonstration. On considère la division euclidienne de P par m_u, etc... □

Théorème 5.13. Les valeurs propres de u sont exactement les racines de m_u.

Ainsi P_u et m_u ont exactement les mêmes racines et m_u divise P_u.

Démonstration. Soit λ une racine de m_u. On a $P_u = Q \cdot m_u$ d'où λ est racine de P_u et est donc une valeur propre de u.
Soit λ une valeur propre de u. On écrit $m_u = \sum i = 0^k a_i X^i$ (avec $a_k = 1$). Soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ. Via un petit calcul, on montre que $0 = m_u(u)(x) = m_u(\lambda) \cdot x$ ce qui entraine $m_u(\lambda) = 0$. □

5.4 Lemme des noyaux

Ici $\dim(E)$ n'est pas supposée finie.

Proposition 5.14. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Alors $\ker(P \times Q(u)) = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$.

Démonstration. Par Bézout on a : il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$.
Soit $x \in \ker(P(u)) \cap \ker(Q(u))$. On applique $(AP + BQ)(u)$ à x et on obtient $x = 0$, la somme est donc directe.
On a $\ker(P(u)) \subseteq \ker(Q(u) \circ P(u)) = \ker((QP)(u))$. Idem $\ker(Q(u)) \subseteq \ker(P(u) \circ Q(u)) = \ker((PQ)(u))$ d'où $\supseteq$.
Soit $x \in \ker((PQ)(u))$. On écrit $x = \underbrace{(A(u)P(u))(x)}_{a} + \underbrace{(B(u)Q(u))(x)}_{b}$. On a alors $P(u)(b) = \cdots = 0$ et $Q(u)(a) = \cdots = 0$ d'où $a \in \ker(\cdots)$ et $b \in \ker(\cdots)$. □

Corollaire 5.15 (Lemme des noyaux)**.** Soient $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors

$$\ker(P_1 \cdots P_m(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_m(u)).$$

Démonstration. Récurrence sur m : $\ker(P_1 \cdot P_2 \cdots P_m(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2 \cdots P_m(u)) = \cdots$. □