Algèbre IV - CF Corrigé. 24.05.2018

Exercice 1.

1. (a) (1,5) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ déterminer la matrice A de la projection orthogonale Φ sur la droite d'équation $x_1 = x_2$.
   Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et preciser comment Φ agit sur les vecteurs de la base canonique.

   (b) (1,5) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle Φ a pour matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et écrire la relation entre A et B.

2. (a) (1,5) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ déterminer la matrice C de la symétrie Ψ par rapport à la droite d'équation $x_2 = \sqrt{3}x_1$.
   Indication : Donner un vecteur-directeur de la droite en question et preciser comment Ψ agit sur les vecteurs de la base canonique.

   (b) (1,5) Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle Ψ a pour matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et écrire la relation entre C et D.

1a) On peut choisir $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur-directeur, par exemple.

$$\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

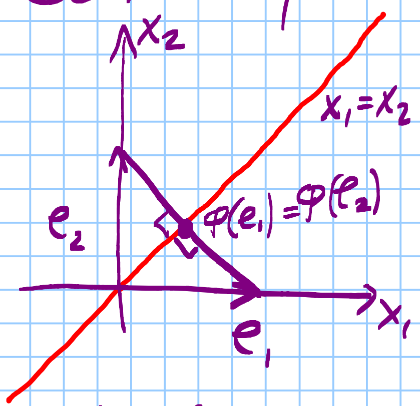
$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\Phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\Phi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \boxed{A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

1b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a deux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\mu = 0$ $\begin{pmatrix} \det A = 0 = \lambda\mu \\ \operatorname{tr} A = 1 = \lambda + \mu \end{pmatrix}$

Géométriquement:



L'espace propre de $\lambda = 1$ est engendré par le vecteur unitaire $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et un vecteur-directeur unitaire de la droite perpendiculaire à la droite $x_1 = x_2$ engendre l'espace propre de $\mu = 0$

On peut choisir $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ou $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base orthonormée dans laquelle Φ a $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour matrice.

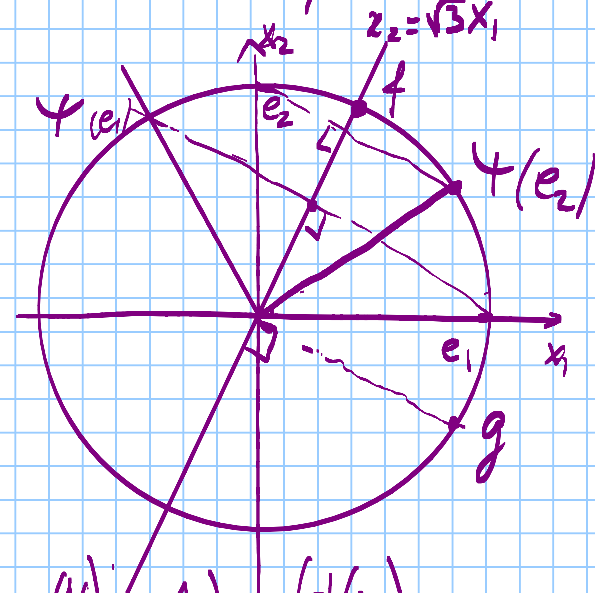
La matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. C'est une matrice orthogonale

$\boxed{P^{-1} = {}^tP = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{A = {}^tPBP}$

Exo 1.2a) On peut prendre $f = \begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ pour vecteur-directeur unitaire

Géométriquement



La formule pour une reflexion par rapport à la droite est

$$\psi\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = 2\,\mathrm{Proj}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - Id\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

$$\psi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$$

$$\psi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2\cdot\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{3}\begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}$$

Ou bien on le voit géométriquement.

$$C = \begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Exo 2.2b. $\psi(f) = f$ et $\psi(g) = -g$ où $f = \begin{pmatrix}1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ et $g = \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ -1/2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la matrice dans la base $\{f_1, f_2\}$ est

$D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. La matrice de passage $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \to \{f; g\}$

est $\boxed{Q = \begin{pmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & -1/2\end{pmatrix}}$, $Q^{-1} = {}^tQ$ (matrice de passage entre deux bases orthonormées

et $\boxed{C = {}^TQDQ}$

Exercice 2.

On note $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients réels. On considère un espace euclidien $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ muni d'un produit scalaire suivant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \quad \langle X, Y\rangle := {}^tX \cdot Y,$$

donné par le produit usuel des matrices.

Soit $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

Rappel :

— la matrice S est symétrique si pour tout vecteur $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\langle X, SY\rangle = \langle SX, Y\rangle$.

— la matrice S est définie positive si pour tout vecteur $X \neq 0, X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ on a $\langle X, SX\rangle > 0$.

1,5 1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

1,5 2. Citer les résultats du cours qui permettent d'affirmer qu'il existe une matrice R et une matrice P telles que $S = {}^tPR^2P$.

1 3. En déduire qu'il existe une matrice inversible M telle que $S = {}^tMM$.

1,5 4. Soient a, b, c des réels. À quelles conditions sur a, b, c la matrice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

est-elle définie positive ?

1 5. Donner un exemple d'une matrice $n \times n$ (avec $n \geq 2$) symétrique définie positive.

1. On a $\langle X, SX\rangle > 0$, $\forall X$. Soit v un vecteur propre de valeur propre λ. $Sv = \lambda v$.
On a $\langle X, SX\rangle = \lambda\langle X, X\rangle > 0$ Comme $\langle X, X\rangle > 0$ (car $X \neq 0$ et $\langle , \rangle$ est le produit scalaire), alors $\lambda > 0$ aussi

2. La matrice symétrique S défini une application autoadjointe.
Par le théorème spectral cette application est diagonalisable dans une base orthonormé constituée de vecteurs propres de S. Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ - la matrice diagonale t.q. $S = P^{-1}DP$
- Par le 1) $\lambda_i > 0$ pour $\forall i$, alors possède une racine carré dans $\mathbb{R}$
D'où $R = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.
La matrice de passage P de la base canonique vers une base orthonormée de vecteurs propres est orthogonale. D'où $P^{-1} = {}^tP$ et le résultat suit.

Exo 2.3 On pose $M = RP$

Alors ${}^tM = {}^t(RP) = {}^tP\,{}^tR$ et comme ${}^tR = R$ en étant diagonale on a $S = {}^tMM$

Exo 2.4 On remarque que A est symétrique - ${}^tA = A$: ${}^t\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

Pour être définie positive on utilise la condition de positivité des valeurs propres. Soit λ, μ - les valeurs props de A. On a $\det A = ab - c^2 = \lambda\mu$ et pour la trace : $\operatorname{tr} A = a + b = \lambda + \mu$

$$\begin{cases} ab - c^2 > 0 \\ a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab > c^2 \\ a + b > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ ab > c^2 \end{cases}}$$

Exo 2.5 Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients complexes.
On pose $V = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) |\ A = {}^t\overline{A} \text{ et } \operatorname{tr}(A) = 0\}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$.

1 (a) Montrer que A est de la forme $\begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix}$ avec a, r, s réels.

1 (b) En déduire que V est un espace vectoriel réel de dimension 3 dont une base $\mathcal{B}$ est formée par les matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

2 (c) Montrer que l'application définie sur $V \times V$ par :

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(AB)$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel V.

1 (d) En notant $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ la norme de A, exprimer $\|A\|^2$ en fonction du déterminant de A.

1,5 (e) Pour j, k appartenant à l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, calculer les produits scalaires $\langle E_j, E_k \rangle$. Que peut-on dire de la base $\mathcal{B}$?

2. Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice telle que ${}^t\overline{P} = P^{-1}$. On note l_P l'endomorphisme de V défini par :

$$\forall A \in V, \quad l_P(A) = PAP^{-1}.$$

1 (a) Montrer que l_P est un endomorphisme *orthogonal* de V muni du produit scalaire défini ci-dessus, c'est-à-dire $\|l_P(A)\| = \|A\|$.

1,5 (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère $P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Pour $j = 1, 2, 3$ exprimer $l_P(E_j)$ comme combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3 (on rappelle que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$).

1,5 (c) Donner la matrice de l_P dans la base $\{E_1, E_2, E_3\}$ et en déduire que l_P est une rotation de l'espace euclidien V dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe de rotation.

Ex 3.1a

$\operatorname{tr} A = a + d = 0 \Rightarrow d = -a$

et $A = {}^t\bar{A}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = \bar{a} \\ b = \bar{c} \\ c = \bar{b} \end{cases}$$

D'où a est réel et si $b = r + is$, alors $c = r - is$, avec $r, s \in \mathbb{R}$

1b) $\begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$

Donc en effet toute matrice se décompose en combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3 de façon unique. a, r, s - sont les coordonnées

1c) $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(AB)$ on pose $A = (a, r, s)$ et $B = (a', r', s')$

$$AB = \begin{pmatrix} a & r+is \\ r-is & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & r'+is' \\ r'-is' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + rr' + ss' + i(r's - rs') & * \\ * & rr' + ss' - i(r's - rs') + aa' \end{pmatrix}$$

$AB = aa' + rr' + ss'$

C'est un produit scalaire car

- bilinéaire : $\operatorname{tr}(A + \lambda A')\cdot B = \operatorname{tr} AB + \lambda \operatorname{tr} A'B$.
- symétrique : $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$
- défini positif : $\operatorname{tr} A^2 = a^2 + r^2 + s^2 > 0$

1d) $\det A = a\cdot(-a) - (r+is)(r-is) = -a^2 - r^2 - s^2$
$= -\operatorname{tr} A^2$

1e) $\operatorname{tr} E_1^2 = -\det E_1 = 1$
$\operatorname{tr} E_2^2 = -\det E_2 = 1$
$\operatorname{tr} E_3^2 = -\det E_3 = 1$

ou bien par le calcul directe :

$E_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_1^2 = 1$

$E_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_2^2 = 1$

$E_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_3^2 = 1$

$E_1 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_1 E_2 = 0$

$E_1 E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_1 E_3 = 0$

$E_2 \cdot E_3 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\operatorname{tr} E_2 E_3 = 0$

On se rend compte que $\{E_1, E_2, E_3\}$ forment une base orthonormée.

2a) ℓ_p preserve V : on montre que ${}^t(\overline{\ell_p A}) = \ell_p A$

$${}^t(\overline{PAP^{-1}}) = {}^t(\overline{P^{-1}})\,\overline{A}\,{}^t\overline{P} = (P^{-1})^{-1} A P^{-1} = PAP^{-1} \quad ({}^t\overline{P} = P^{-1} \text{ et } {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1})$$

Pour m.q. $\|\ell_1 A\| = \|A\|$, $\|\ell_p(A)\| = \sqrt{\operatorname{tr}(PAP^{-1})^2}$

On va utiliser le 1d : $\operatorname{tr} A^2 = -\det A$

Ici : $\det(PAP^{-1}) = \det A$ d'où le resultat

2b) $P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$

$$PE_1P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{E_1}$$

$$PE_2P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{2i\theta} \\ e^{-2i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos 2\theta + i\sin 2\theta \\ \cos 2\theta - i\sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\cos 2\theta \cdot E_2 + \sin 2\theta \cdot E_3}$$

$$PE_3P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\theta} \\ -ie^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & ie^{i2\theta} \\ -ie^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\cos\theta - \sin 2\theta \\ -i\cos 2\theta - \sin 2\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\sin 2\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cos 2\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \boxed{-\sin 2\theta \cdot E_2 + \cos 2\theta\, E_3}$$

2c) La matrice de ℓ_p est alors $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ avec l'axe de rotation dirigée par E_1