Devoir n° 3

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.**
Les exercices sont indépendants.

Partie Algèbre

Exercice 1. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$, et déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de calculer P^{-1}).

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est de la forme $P_A(X) = (X+1)^2(X-k)$, où k est un réel que l'on exprimera en fonction de α.
2. Déterminer, en fonction de α, les valeurs propres de A et leur multiplicité dans le polynôme caractéristique.
3. Déterminer les nombres réels α pour lesquels A est diagonalisable.
4. On suppose maintenant que $\alpha = -1$.
   (a) Existe-t-il une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?
   (b) Expliquer comment calculer une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $C^3 = A$. (On ne demande pas de réaliser effectivement les calculs.)

Partie Analyse

Exercice 3. Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que la partie de parabole $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2,\ x \in]0,3[\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Limites

1. Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(a,b) \in D$. Donner la définition de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ et démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x-y)$ existe.
2. Étudier l'existence des limites suivantes et les calculer si elles existent :

$$\textbf{a.} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x-y}, \quad \textbf{b.} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x-1} \quad \textbf{c.} \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2}{x-y}.$$

Exercice 5. Trouver l'ensemble des points de continuité de la fonction suivante

$$g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} y^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$