Devoir n° 3. Corrigé de la partie Analyse

Exercice 3.
Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y = x^2,\ x \in]0,3[\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Corrigé. Un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui est voisinage de chacun de ses points, i.e $\forall (a,b) \in U,\ \exists r > 0$ tel que le disque de centre (a,b) et de rayon r, $B((a,b),r)$ est contenu dans U. Pour montrer que P n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ prenons un point $(1,1) \in P$ ($(1,1)$ satisfait l'équation $y = x^2$ et $1 \in]0,3[$). Pour tout $r > 0$ le point $(1+0.5r, 1)$ est dans la boule $B((1,1),r)$ mais n'est pas pas dans P : $1 = (1+0.5r)^2$ n'a pas de solution sauf $r = 0$. On a montré qu'il n'y a pas de boule dans $\mathbb{R}^2$ au centre de $(1,1)$ contenue dans P.
Exercice 4.

1. *Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(a,b) \in D$. Donner la définition de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ et démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x-y)$ existe.*
2. *Étudier l'existence des limites suivantes et les calculer si elles existent :*
   a. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x-y}$, **b.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{x-1}$ **c.** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^2}{x-y}$.

Corrigé.
1. La définition de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \text{il} \quad \exists \eta > 0 \quad \text{t.q.} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \| (x,y) - (a,b) \| < \eta \Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$$

On considère la fonction $f(x,y) = x - y$ en point (a,b). On va montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x - y = a - b$.
Soit $\epsilon > 0$ on cherche $\eta > 0$ t.q $\| (x,y) - (a,b) \| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \eta$ implique $|(x-y) - (a-b)| < \epsilon$.
Inégalité triagulaire donne $|(x-y) - (a-b)| = |(x-a) - (y-b)| \le |(x-a)| + |(y-b)|$.
Du fait que $(|x-a| - |y-b|)^2 \ge 0$ suit que $2|x-a||y-b| \le |(x-a)|^2 + |(y-b)|^2$
et alors $(|(x-a)| + |(y-b)|)^2 = 2|x-a||y-b| + (x-a)|^2 + |(y-b)|^2 \le 2(|x-a|^2 + |y-b|^2)$.
Finalement si $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \le \epsilon/2$ on a

$$|(x-y) - (a-b)| \le (|(x-a)| + |(y-b)|) = \sqrt{(|(x-a)| + |(y-b)|)^2} \le 2\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \le \epsilon$$

On a trouvé alors $\eta = \epsilon/2$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x - y = a - b$.
Remarque. Bien sure on peut juste dire que $x - y$ est un polynôme et tous les polynômes sont continues, mais ici la question est evidement comment on démontre la continuité directement, sans utilisation de proprietès des limites (somme, produit etc)
2. **a.** La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{x-y}$ n'existe pas car le dénominateur $(x-y) \to 0 - 0 = 0$ (4.1) et numerateur est une constante $= 1$. On remarque aussi que quand $(x,y) \to (0,0)$ et si $x > y$, $\dfrac{1}{x-y} \to +\infty$, et si $x < y$, $\frac{1}{x-y} \to -\infty$.
On conclut qu'il n'y a pas de limite.
b. On regarde deux restrictions de $\dfrac{x-y}{x-1}$ sur deux chemins passant par $(1,1)$: sur le chemin $y = x$ donnant la limite 0, et sur l'autre $y = 1$ donnant $\lim_{(x,1)\to(1,1)} \dfrac{x-1}{x-1} = 1$. On conclut que la limite n'existe pas.
c. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^2}{x-y} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)-(y-1)} = \lim\limits_{(X,Y)\to(0,0)} \dfrac{X^2}{X-Y}$ avec $X = x - 1$ et $Y = y - 1$. Là, on se rend compte, que $X - Y$ peut être arbitrarement petit par rapport à X^2 ou bien arbitrarement grand. Par exemple, si on se restraint à un chemin donné par une équation $Y = X + X^2$, passant par $(0,0)$, on a -1 comme limite. Si c'est $Y = X^2$ on a $\dfrac{X}{1-X} \to 0$ comme limite. On conclut que ici non-plus la limite n'existe pas.

Exercice 5. *Trouver l'ensemble des points de continuité de la fonction suivante* $g : (x,y) \longmapsto \begin{cases} y^2 & si\ x \le 0 \\ \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & si\ x > 0 \end{cases}$.

Corrigé. En dehors de la droite $x = 0$ la fonction g est continue car y^2 est un polynôme et $\dfrac{y^4}{x^2+y^2}$ est une fraction de polynômes avec le dénominateur non-nul.
En $(0, y_0)$ un point de la droite $x = 0$, tel que $y_0 \ne 0$ on a $g(0,y_0) = y_0^2$ et la limite de la fonction définie sur la partie $x > 0$ donne la même valeur : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to y_0} \dfrac{y^4}{y^2} = y_0^2$.
En point $(0,0)$ on a $f(0,0) = 0^2 = 0$ et la limite se calcule en utilisant les coordonnées polaires
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^4 \sin^4 t}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} r^2 \sin^4 t = 0$, car $r^2 \to 0$ et $|\sin^4 t| \le 1$ est borné.
Conculison : la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^2$.