2017-18 Feuille 4. Limites des fns de plusieurs variables

Exo 13) 1. $f_1 : (x,y) \longmapsto \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en $(1,0)$

$\ln(x+e^y) \longrightarrow \ln(1+e^0) = \ln 2$

$\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \sqrt{1^2+0^2} = 1 \neq 0$

$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f_1(x,y) = \ln 2$ par continuité d'une fraction des fns continue avec le dénominateur $\neq 0$

2. $f_2(x,y) = \dfrac{x^3+(y+1)^3}{x^2+(y+1)^2} \overset{\substack{X=x\\Y=y+1}}{=\!=} \dfrac{X^3+Y^3}{X^2+Y^2}$

en $(0,-1)$

$= \dfrac{r^3\cos t + r^3 \sin t}{r^2} = r(\cos t + \sin t)$

$r(\cos t + \sin t) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ car $r \longrightarrow 0$ multiplié par une fonction bornée $|\sin t + \cos t| < 2$

3. $f_3(x,y) = \dfrac{(x-1)^3(y-2) - (y-2)^2(x-1)}{(x-1)^4 + (y-2)^2}$

On a $u = x-1$, $v = y-2$

qui donnent la fonction $\dfrac{u^3v - v^2u}{u^4+v^2}$

$= \dfrac{\cancel{r^2}(r^2\cos^3 t \sin t - r\cos^2 t \sin t)}{\cancel{r^2}(r^2\cos^4 t + \sin^2 t)}$

En coord. polaires : $u = r\cos t$, $v = r\sin t$ (2

le haut $\xrightarrow[r\to 0]{} 0$ car

$r^2 \to 0$ et $\cos^3 t \sin t$ est borné

$r \to 0$ et $\cos t \sin^2 t$ est borné

et le denominateur $\longrightarrow \sin^2 t$

quand $r \longrightarrow 0$

du coup si $\sin^2 t \neq 0$ la limite

est $= 0$

si $\sin t = 0$ i.e. $v = r\sin t = 0$

On a $\dfrac{u^3 v + v^2 u}{u^4 + v^2} = \dfrac{0}{u^4} = 0$

<u>Conclusion</u> : $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f_3(x,y) = 0$

4. $f_4(x,y) = \dfrac{x+5}{(x+2)^5 + y^2}$ n'a pas de limite

car en changeant de variable

$u = x+5$ puis en passant par
$v = y$ coord. polaires on a

$$\frac{u}{u^2+v^2} = \frac{r\cos t}{r^2} = \frac{\cos t}{r}$$

et avec $r \longrightarrow 0$ $\dfrac{\cos t}{r} \longrightarrow \pm\infty$
(signe + ou − depend de $\cos t$)

Continuité

Exo 14.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. La fonction f est continue en $(0,0)$ si la $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f$ existe et égale à $f(0,0)$.

Une droite quelconque D passant par origine a pour equation

$y = kx$ ou $x = 0$

La restriction sur $y = kx$ est

$$\frac{x^2 \cdot kx}{x^4+(kx)^2} = \frac{kx}{x^2+k^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\lim\limits_{x\to 0} kx}{\lim\limits_{x\to 0}(x^2+k^2)} = \frac{0}{k^2} = 0$$

$\Rightarrow f(x,kx)$ est continue si $k \neq 0$ en $(0,0)$

sur la droite $y = 0$ (quand $k=0$) on a $\dfrac{0}{x^4} = 0$ continue

et si $x=0$ on a $\dfrac{0}{y^2} = 0$ - continue

La restriction de f à D est continue

2. Cependant on ne peut pas déduire que f est continue en $(0,0)$ car il faut m.q. f a pour limite 0 ~~ds seulement~~ sur les restrictions de f sur les

droites mais sur n'importe quel chemin passant par $(0,0)$.

Pour montrer cela on va passer aux coord. polaires pour conclure que en effet la limite est unique et $= 0$.

$$\frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \frac{r^3 \cos^2 t \sin t}{r^4 \cos^4 t + r^2 \sin^2 t}$$

$$= \frac{r \cos^2 t \sin t}{r^2 \cos^4 t + \sin^2 t} \xrightarrow[r\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{\lim_{r\to 0} r \cos^2 t \sin t}{\lim (r^2 \cos^4 t + \sin^2 t)} = \dfrac{0}{\sin^2 t} = 0 & \text{si } \sin t \neq 0 \\ \dfrac{0}{r^2 \cos^4 t} = 0 & \text{si } \sin t = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Exo 15}}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En coord. polaires: $x = r\cos t$, $y = r \sin t$

$x^2+y^2 = r^2$

On a $\dfrac{r^\alpha \cos^\alpha t \; r^\beta \sin^\beta t}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2} \cos^\alpha t \sin^\beta t$

$$\rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta-2 > 0 \\ \pm\infty & \text{si } \alpha+\beta-2 < 0 \quad (\text{signe dépend de } \cos^\alpha t \sin^\beta t) \\ \cos^\alpha t \sin^\beta t & \text{si } \alpha+\beta-2 = 0 \end{cases}$$

Du coup la fonction est continue ssi $\alpha+\beta > 2$.