Université Claude Bernard - Lyon 1
Math I Fond. Math - Parcours prépa Semestre automne 2016-2017

Feuille d'exercices n° 8
ARITHMÉTIQUE

Exercice 1
Effectuer la division euclidienne de a par b pour les valeurs de a et b suivantes :

1. $a = 2867$ et $b = 6$; 2. $a = 7813$ et $b = -12$;
3. $a = -959$ et $b = 6$; $a = -1733$ et $b = -5$.

Exercice 2
Soit $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si b divise a, alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. On note r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.

Exercice 3
Montrer qu'il n'existe pas de couple $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $7a - 4b^3 = 1$.
Regarder l'équation modulo 7 et distinguer selon le reste de la division de b par 7.

Exercice 4

1. (a) Déterminer $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $7^{k_0} \equiv 1$ [12].
   (b) Déterminer $k_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $6^{k_0} \equiv 9$ [12].
   (c) Déterminer $(k_2, k_3) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_2 < k_3$ et $3^{k_2} \equiv 3^{k_3}$ [12].
   (d) Déterminer les restes de la division euclidienne par 12 des nombres suivants : 7^{30}, 6^{13}, 3^{17}, 31^{77}, $19^5 + 30^{144} + 15^{10}$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 122^{137} par 9.

Exercice 5
Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de 3^{1111}.

Exercice 6

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 126 et 230.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et soit d le plus grand diviseur commun de a et b. Montrer qu'un entier n divise a, b et c si et seulement s'il divise c et d. Définir le plus grand diviseur commun de trois entiers.
3. Calculer le plus grand diviseur commun des nombres suivants :

1. 390, 720 et 450 ; 2. 180, 606 et 750.

Exercice 7
Déterminer les couples d'entiers naturels (m, n) tels que

1. $\mathrm{pgcd}(m, n) = 18$ et $m + n = 360$; 2. $\mathrm{pgcd}(m, n) = 18$ et $mn = 6480$.

Exercice 8
Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que si $a \wedge b = 1$, alors pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, on a l'équivalence : $ap = bq$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = bk$ et $q = ak$.

2. Étudier la réciproque.

Exercice 9
Trouver les couples (a, b) solutions des équations suivantes :

$$1.\ 18a + 5b = 11; \qquad 2. 39a - 12b = 121; \qquad 3.\ 14a - 21b = 49.$$

Exercice 10
Déterminer les solutions $n \in \mathbb{Z}$ des systèmes suivants :

$$1.\ \begin{cases} n \equiv 1\ [20] \\ n \equiv 3\ [7]\,; \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} n \equiv 13\ [15] \\ n \equiv 6\ [10]\,; \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} n \equiv 11\ [15] \\ n \equiv 6\ [10]. \end{cases}$$

Exercice 11
(Extrait du contrôle final 2014.)

1. Calculer le pgcd de 224 et 119.
2. Donner $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $224u + 119v = \mathrm{pgcd}(224, 119)$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions pour $x \in \mathbb{Z}$ du système

$$x \equiv 3 \mod 224 \quad \text{et} \quad x \equiv 17 \mod 119.$$

Exercice 12

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $a \wedge b = 1$ si et seulement si $(a + b) \wedge (ab) = 1$.
2. A-t-on, pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \wedge b = (a + b) \wedge (ab)$?

Exercice 13
Déterminer les valeurs de l'entier n pour lesquels la fraction $\dfrac{n+2}{n+9}$ est irréductible ?

Exercice 14

1. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \wedge q = 6$ et $p \vee q = 21$.
2. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \wedge q = 5$ et $p \vee q = 0$.
3. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \wedge q = 35$ et $p \vee q = 210$.
4. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \wedge q = 7$ et $pq = 21$.
5. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \wedge q = 2$ et $pq = 8$.
6. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \vee q = 7$ et $pq = 20$.
7. Trouver l'ensemble des couples $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \vee q = 35$ et $pq = 175$.

Exercice 15

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 12.
2. Énumérer les diviseurs de 12.

Exercice 16

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de N le nombre $\sigma_0(N)$ de diviseurs positifs de N et leur somme $\sigma_1(N)$.
2. Déterminer l'ensemble des entiers positifs possédant 6 diviseurs positifs dont la somme est 28.

Exercice 17
Montrer que pour tout entier n, $n^5 - n$ est divisible par 15.