Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre automne 2016 - 2017
Cursus prépa - Première année

Fondamentaux des mathématiques - DS n°2
PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Au cours d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

- *Les calculatrices ne sont **pas autorisées**.*
- *L'exercice 5 (Vrai/Faux) est à compléter **directement sur l'énoncé**.*
  Vous veillerez à le rendre avec votre copie.

Dans la suite, on note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1 : *Questions de cours*

1 - Soit E un ensemble, et A, B, C $\in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2 - Soit $f : E \longrightarrow F$ une application et A, B $\in \mathcal{P}(E)$.
  a. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
  b. Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

Exercice 2 :

1 - Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
Dans le cas où l'assertion est fausse, on pourra proposer une démonstration en donnant un contrexemple.

  a. $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}\ ,\ xy > 0$.
  b. $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}\ ,\ xy > 0$.
  c. $\forall\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\ \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ f(x) \neq f(y)$.

On considère à présent la fonction $f\ : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$.
  d. $\exists\, \epsilon > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) > \epsilon$.

2 - Donner la négation des assertions ci-dessus.

Exercice 3 : On considère les applications :

$$f : \mathbb{C}\setminus\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C},\quad z \longmapsto \frac{z-i}{z+i} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{C}\setminus\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C},\quad z \longmapsto 1 - \frac{2i}{z+i}$$

1 - Montrer que $f = g$.
2 - En déduire que $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

3 - On note h l'application :

$$h : \mathbb{C}\setminus\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$$
$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

Montrer que h est bijective.
4 - Déterminer une expression de la fonction réciproque de h.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = 1\}$. On considère l'application :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$x \longmapsto e^{2i\pi x}$$

1 - a. Cette application est-elle injective ? surjective ? bijective ?
b. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.
2 - On note p l'application :

$$p : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$z \longmapsto Re(z)$$

et on pose $g = p \text{ o } f$.

a. Déterminer $g(\mathbb{R})$.
b. Déterminer deux ensembles I et J tels que l'application

$$\tilde{g} : I \longrightarrow J$$
$$x \longmapsto g(x)$$

soit bijective.
3 - (*facultatif*) Reprendre les questions **1.a** et **1.b.** avec $f_{|[0,1[}$.

<u>Exercice 5 :</u> *Déterminer si les assertions suivantes sont vraies (**V**) ou fausses (**F**). On ne demande pas de justifier vos réponses.* ***Attention :*** *0.5 par bonne réponse ; -0.25 par réponse erronée.*

$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non(Q) \Rightarrow non(P))$.	
$\Big(P \Rightarrow (Q \text{ et } R)\Big) \Leftrightarrow \Big(non\big(P \text{ et } (non(Q) \text{ ou } non(R))\big)\Big)$.	
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto x^2 \Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}_+$.	
$f : [-2,4] \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ x \longmapsto \sin^2(x) \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-\pi/2, \pi/2\}$.	
Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si f et g sont bijectives, alors $f \text{ o } g = g \text{ o } f$.	
Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Si f est injective et g est surjective, alors $f \text{ o } g$ est bijective .	