**Université Claude Bernard - Lyon 1** Semestre automne 2015-2016

Math I - CPGEI

---

**Devoir n° 3**

Partie commune

---

**Exercice 1.** Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et la fonction $f$ définie comme suit :

$$f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1+x^n}{(1+x)^n}. \end{array}$$

1. Calculer, si elle existe, la limite de $f$ en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0, +\infty[$.
3. En déduire que $f$ admet un minimum sur $[0, +\infty[$ et le préciser.
4. Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$.
5. Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, on a $(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

**Corrigé :**

1. Pour $x > 0$ on a $f(x) = \frac{\frac{1}{x^n}+1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^n} \to_{x\to\infty} 1$.
2. Comme $(1 + x)^n > 0$ pour $x$ positif, $f$ est dérivable sur $]0, \infty[$ comme composée et quotient de fonctions classiques dérivables, et pour $x > 0$ on a
$$f'(x) = n\frac{x^{n-1} - 1}{(1 + x)^{n+1}}.$$
On en déduit le tableau de variations suivant pour $f$ :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | | $2^{-(n-1)}$ | | $1$ |

3. D'après le signe de $f'$, $f$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc comme minimum $f(1) = 2^{-(n-1)}$.
4. D'après la question précédente, on a $f(x) \geq 2^{-(n-1)}$ pour tout $x > 0$, ce qui est équivalent à $(1 + x)^n \leq 2^{n-1}(1 + x^n)$ pour tout $x > 0$.
5. Comme $x/y > 0$ on peut remplacer dans le résultat de la question précédente $x$ par $x/y$, ce qui donne $\left(1 + \frac{x}{y}\right)^n \leq 2^{n-1}\left(1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n\right)$, et qui implique, en multipliant chaque membre par $y^n$ qui est positif, $(x + y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n)$.

**Exercice 2.**

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

2. On considère l'application $f$ définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x+\sqrt{x^2+1}). \end{array}$$

   (a) Justifier que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $f$ est injective.

   (c) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $f(\mathrm{sh}(y)) = y$. Que peut-on en déduire ?

   (d) Calculer, si elles existent, les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

**Corrigé :**

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 < x^2+1$, ce qui implique, comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $|x| < \sqrt{x^2+1}$.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x + \sqrt{x^2+1} \geq -|x| + \sqrt{x^2+1}$, qui est strictement positif d'après la question précédente.

2. (a) La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives, et donc la fonction $x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Cette fonction est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente, et on en déduit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, la fonction $x \mapsto \ln x$ étant dérivable sur $]0,+\infty[$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

   (b) On voit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f$ est ainsi strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc injective.

   (c) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ et $\mathrm{ch}(x) \geq 0$, on a $\sqrt{\mathrm{sh}^2(x)+1} = \mathrm{ch}(x)$, et donc $f(\mathrm{sh}(x)) = \ln(\mathrm{sh}(x)+\mathrm{ch}(x)) = \ln(e^x) = x$. On en déduit que $f$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   (d) On a $x+\sqrt{x^2+1} \to_{x\to+\infty} +\infty$, et donc $f(x) \to_{x\to+\infty} +\infty$.

   Pour $x < 0$ on a
$$x+\sqrt{x^2+1} = -|x|+\sqrt{x^2+1} = (-|x|+\sqrt{x^2+1})\frac{|x|+\sqrt{x^2+1}}{|x|+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{|x|+\sqrt{x^2+1}} \to_{x\to-\infty} 0.$$

   On en déduit que $f(x) \to_{x\to-\infty} -\infty$.

**Exercice 3.**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, notons $P(z) = z^2 - (\sqrt{3}-3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i$.

1. (a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$. Notons $z_1$ et $z_2$ les deux solutions.

   (b) Montrer que $z_1$ et $z_2$ ont le même module, qui est noté $r$.

2. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$.

   (b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, on a $P(z)\Big(\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{1}{z - z_2}\Big) = 2z - (z_1 + z_2)$.

3. (a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1, la partie réelle de $\dfrac{1}{1 - z}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{|w| - w}$.

   (c) Déduire de (2b) et (3b) la partie réelle de $\dfrac{2r^2 - r(z_1 + z_2)}{P(r)}$.

**Corrigé :**

1. (a) Le discriminant de $z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i$ est $\Delta = (\sqrt{3} - 3i)^2 + 4(2 + 2\sqrt{3}i) = 2 + 2\sqrt{3}i$. Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de $\Delta$. Alors $x^2 - y^2 + 2ixy = \Delta$ et $x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta|$, donc $x$ et $y$ vérifient

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= |\Delta| = \sqrt{4 + 12} = 4 \\ x^2 - y^2 &= \mathrm{Re}(\Delta) = 2 \\ 2xy &= \mathrm{Im}(\Delta) = 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} x^2 &= 3 \\ y^2 &= 1 \\ 2xy &= 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ ie } \begin{cases} x = \sqrt{3} \text{ ou } -\sqrt{3} \\ y = 1 \text{ ou } -1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$$

   Les racines carrées de $\Delta$ sont $\delta_1 = \sqrt{3} + i$ et $\delta_2 = -\sqrt{3} - i$, et les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont $z_1 = \dfrac{(\sqrt{3} - 3i) + \delta_1}{2} = \sqrt{3} - i$ et $z_2 = \dfrac{(\sqrt{3} - 3i) + \delta_2}{2} = -2i$.

   (b) $|z_1| = \sqrt{3 + 1} = 2$ et $|z_2| = \sqrt{0 + 4} = 2$. Les modules de $z_1$ et $z_2$ sont égaux à $r = 2$.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant $(z - z_1)(z - z_2)$ on obtient :

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = z^2 - (\sqrt{3} - 3i)z - 2 - 2\sqrt{3}i = P(z)$$

   (b) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$P(z)\Big(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2}\Big) = (z - z_1)(z - z_2)\Big(\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2}\Big) = (z - z_2) + (z - z_1) = 2z - (z_1 + z_2)$$

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1. Alors

$$2\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1 - z}\Big) = \frac{1}{1 - z} + \overline{\Big(\frac{1}{1 - z}\Big)} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \overline{z}}$$

   Comme $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, donc

$$\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \overline{z}} = \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z} + \frac{z}{z - 1} = \frac{1 - z}{1 - z} = 1$$

   Donc $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{1}{1 - z}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Alors

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{|w| - w}\Big) = \frac{1}{|w|}\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1 - \frac{w}{|w|}}\Big) = \frac{1}{2|w|}$$

   car $\dfrac{w}{|w|}$ est de module 1, différent de 1.

(c) Tout d'abord, comme $z_1$ et $z_2$ sont différents de $r=2$, $P(r)\neq 0$ et $\dfrac{2r^2-r(z_1+z_2)}{P(r)}$ est bien défini. En appliquant (2b) pour $z=r$, on obtient

$$P(r)\Big(\frac{1}{r-z_1}+\frac{1}{r-z_2}\Big)=2r-(z_1+z_2)$$

c'est-à-dire

$$\frac{2r^2-r(z_1+z_2)}{P(r)}=r\Big(\frac{1}{r-z_1}+\frac{1}{r-z_2}\Big)$$

Or

$$\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r-z_1}+\frac{1}{r-z_2}\Big)=\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r-z_1}\Big)+\mathrm{Re}\Big(\frac{1}{r-z_2}\Big)=\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r}=\frac{1}{r}$$

d'après (3b). Comme $r$ est réel, $\mathrm{Re}\Big(\dfrac{2r^2-r(z_1+z_2)}{P(r)}\Big)=r\mathrm{Re}\Big(\dfrac{1}{r-z_1}+\dfrac{1}{r-z_2}\Big)=1.$

**Exercice 4.** `Vrai ou faux`

Pour chacune des propositions entre guillemets, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. « Pour tout ensemble $E$ et toute application $f:E\to E$, si $f(f(E))=E$, alors $f$ est surjective. »
2. Pour tout ensemble $E$ et toutes parties $A$ et $B$ de $E$, notons $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
   « Pour tout ensemble $E$ et toute partie $A$ de $E$, il existe une partie $B$ de $E$ telle que $A\triangle B=E$. »
3. « Pour tous ensembles finis $A$ et $B$, si $\mathrm{card}(A)>\mathrm{card}(B)$, alors toutes les applications de $A$ dans $B$ sont surjectives. »
4. « La fonction
   $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
   est injective, et elle n'est pas strictement monotone. »
5. Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$.
   « L'application
   $$\begin{array}{rcl} \partial:\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' \end{array}$$
   est injective. »

**Corrigé :**

1. VRAI. Soient $E$ un ensemble et $f:E\to E$ telle que $f(f(E))=E$. Soit $x\in E=f(f(E))$. Alors il existe $y\in f(E)\subset E$ tel que $x=f(y)$, donc $f$ est surjective.
2. VRAI. Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. Posons $B=E\setminus A$. Alors $A\cap B=\emptyset$ et $A\cup B=E$, donc $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=E\setminus\emptyset=E$.
3. FAUX. Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis, tels que $\mathrm{card}(A)>\mathrm{card}(B)\geq 2$. $B$ contient au moins deux éléments $b_1$ et $b_2$. Soit
   $$\begin{array}{rcl} f:A & \to & B \\ a & \mapsto & b_1 \end{array}$$
   Comme $f(A)=\{b_1\}$, $b_2$ n'a pas d'antécédent par $f$, donc $f$ est une application de $A$ dans $B$ qui n'est pas surjective.

4. VRAI. Soit
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$
Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^*$. Alors $x = f(y) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$, donc tout $x \in \mathbb{R}^*$ a un unique antécédent par $f$, qui est $\dfrac{1}{x}$. De plus, 0 n'admet pas d'antécédent par $f$. Donc tout élément $x \in \mathbb{R}$ a au plus un antécédent par $f$, c'est-à-dire $f$ est injective. De plus $f(1) \geq f(2)$, donc $f$ n'est pas strictement croissante, et $f(-1) \leq f(1)$, donc $f$ n'est pas strictement décroissante. Donc $f$ n'est pas strictement monotone, bien qu'elle soit injective.

5. FAUX. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Elle admet alors une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$, donc $F$ est un antécédent de $f$ par $\partial$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et posons
$$\begin{array}{rcl} F_\alpha : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + \alpha \end{array}$$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'_\alpha(x) = f(x)$, donc $F_\alpha$ est aussi un antécédent de $f$ par $\partial$, qui est différent de $F$ lorsque $\alpha \neq 0$. Donc $\partial$ n'est pas injectif.