Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Math I - CPGEI

Devoir n° 5

PARTIE COMMUNE

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, soient A, B et C trois points distincts entre eux et distincts de O. Soient a, b et c leurs affixes respectifs.

1. On note $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$. Déterminer le module et l'argument de $-j^2$ et calculer $1 + j + j^2$.
2. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$. Soit M un point distinct de O et soit z son affixe.
   (a) Déterminer l'affixe z' de $M' = R(M)$.
   (b) Que peut-on dire du triangle OMM' ?
   Soient $A' = R(A)$, $B' = R(B)$ et $C' = R(C)$. On note leurs affixes a', b' et c'.
3. Soient U, V et W les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
   (a) Calculer les affixes u, v et w de U, V et W en fonction de a, b, c et j.
   (b) Démontrer que le triangle UVW est équilatéral.

Exercice 2.

1. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation :
$$(E_0) \qquad 7x \equiv 0 \quad [30].$$
2. Expliciter un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que :
$$7u + 30v = 1.$$
3. De préférence en utilisant la question précédente, expliciter un entier relatif x_1 qui soit solution de l'équation :
$$(E_1) \qquad 7x \equiv 1 \quad [30].$$
4. Pour $b \in \mathbf{Z}$, on note (E_b) l'équation d'inconnue entière :
$$(E_b) \qquad 7x \equiv b \quad [30].$$
   (a) De préférence en utilisant la question précédente, montrer que l'équation (E_b) a au moins une solution dans $\mathbf{Z}$.

(b) Montrer que l'équation (E_b) a une et une seule solution dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 28, 29\}$.

(c) `Vrai ou faux?` (Justifier la réponse comme dans l'exercice 4.)

Pour tout $b \in \mathbf{Z}$, l'équation (E_b) a une et une seule solution dans $\{13, 14, 15, \ldots, 41, 42\}$.

Exercice 3. `Étude d'une suite récurrente` Soit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{5x-3}{x+1}. \end{array}$$

1. Calculer les limites de f au bord du domaine de définition, c'est-à-dire en $-\infty$, $(-1)^-$, $(-1)^+$ et $+\infty$. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de définition, donner son tableau de variations et faire un graphe sommaire de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$, pour $x > -1$, admet deux solutions α et β avec $\alpha > \beta$.
3. Montrer que $f\big([\beta, \alpha]\big) \subset [\beta, \alpha]$, et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ donnée par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 1$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$$

est une suite géométrique dont on précisera la raison.

5. En déduire une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et montrer qu'elle converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

Exercice 4. `Vrai ou faux ?`

Pour chacune des propositions entre guillemets, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. « L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2\dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{cccc} y : &]0, +\infty[& \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \lambda x^2 + x^4 \end{array}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}. »$$

2. « La fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto \sin\big(\sqrt{x^2+1}\big) + \ln\big(x^2+1\big)$$

est une primitive de la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}\cos(\sqrt{x^2+1}) + 2x}{x^2+1}. »$$

3. « La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = \sin(12n+4)\frac{(3n+5)^2}{n^3 + \frac{1}{n} + 1}$$

est convergente. »