Partie commune - Devoir numéro 4 - Corrigé

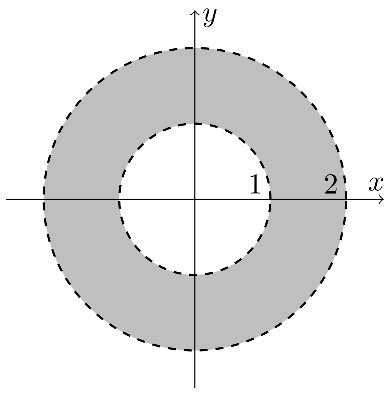
Partie Analyse

Exercice 1. On étudie l'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$.

1. Esquisser U.
2. (a) Donner la définition d'un compact dans un espace quelconque.
   (b) Expliciter un exemple d'une suite $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$, convergente vers un point qui n'appartient pas à U.
   (c) Montrer que U n'est pas un compact.
3. Donner la définition d'un ouvert et expliquer pourquoi U est un ouvert.

Corrigé.

1. L'ensemble $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$. Un produit de deux nombres réels $x^2 + y^2 - 4$ et $x^2 + y^2 - 1$ est strictement négatif si et seulement si un des facteurs est strictement positif et l'autre est strictement négatif. Cela est possible à l'intersection du disque de rayon 2 : $x^2 + y^2 - 4 < 0$ et de l'extérieur du disque de rayon 1 : $x^2 + y^2 - 1 > 0$. Voici le dessin :



2. (a) Une partie K de E est dite compacte si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente.
   (b) Considerons par exemple une suite $(x_n, y_n) = (1 + 1/n, 0),\ n \in \mathbb{N}$. Elle est dans U car $(x_n^2 + y_n^2 - 4)(x_n^2 + y_n^2 - 1) = ((1 + 1/n)^2 - 4)((1 + 1/n)^2 - 1) < 0$. Cette suite converge vers le point $(1, 0)$, qui n'appartient pas à U.
   (c) Prennons la suite de 2(b). Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite. Alors la suite de 2(b) n'a pas de sous-suite qui converge vers un point de U. Elle ne satisfait pas la définition 2(a) et on conclut que U n'est pas un compact.
3. La définition d'un ouvert : une partie U de E est dite ouverte si $\forall x \in U, \exists r > 0$ tel que $B(X, r) \subset U$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. On choisi $r = \dfrac{1}{2}\min(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 1, 2 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$. On voit que la boule $B((x_0, y_0), r) \subset U$. On conclut que U est un ouvert.

Exercice 2.

1. Etudier l'existence de la limite suivante et la calculer si elle existe $\lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$ où $b \in \mathbb{R}$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{1-e^{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Est-ce que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$?
3. On considère la fonction $g(x,y) = \dfrac{x+2y-5}{x+y-3}$ au voisinage du point $(1,2)$.
   Montrer que la limite $\lim_{(x,y)\to(1,2)} g(x,y)$ n'existe pas.

Corrigé.

1. La fonction $\dfrac{\sin(xy)}{x} = y\dfrac{\sin(xy)}{xy}$ et la limite

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} y\frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} y \cdot \lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} \frac{\sin(xy)}{xy} = b \cdot 1 = b.$$

   On utilise les propriétés des limites suivantes -
   — limite d'un produit est le produit des limites
   — limite d'une fonction composée est la fonction composée des limites : $\dfrac{\sin(xy)}{xy}$ est une fonction composée de $(x,y) \mapsto xy$ et la fonction ϕ qu'on défini comme $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, si $t \neq 0$ et $\phi(0) = 1$. On a $\lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} xy = 0$ et $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$.
2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant qu'un quotient des fonctions continues : $1 - e^{xy}$ et $x^2 + y^2$. On utilise les équivalences : $1 - e^t \sim_0 t$ et alors la fonction composée $1 - e^{xy} \sim_{(0,0)} xy$. On alors

$$\frac{1-e^{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} \sim_(0,0) \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   En coordonnées polaires $x = \rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta,\ \rho \in \mathbb{R}_+,\ \theta \in [0,\pi[$ on a

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \rho\sin\theta\cos\theta$$

   On a $|\rho\sin\theta\cos\theta| \leq \rho$ et quand $(x,y) \to 0$ on a $\rho \to 0$ et par le lemme de gendarmes $\rho \to 0$ implique que $\rho\sin\theta\cos\theta \to_{\rho\to 0} 0$ et donc $f(x,y)$ aussi. La fonction f est donc continue en $(0,0)$. Conclusion : la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. En effet, regardons une restriction de g sur deux droites $x = 1$ et $y = 2$ passant par le point $(1,2)$.
   $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+2y-5}{x+y-3}\Big|_{x=1} = \lim_{y\to 2} \dfrac{1+2y-5}{1+y-3} = \lim_{y\to 2} \dfrac{2y-4}{y-2} = 2$
   L'autre resriction donne
   $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+2y-5}{x+y-3}\Big|_{y=2} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x+2\cdot 2-5}{x+2-3} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x-1} = 1.$
   Les restrictions sur les deux droites différentes passantes par le point $(1,2)$ donnent des résultats différents ce qui prouve que la limite n'existe pas car si elle avait existé elle aurait été unique.

Partie Algèbre

Exercice 3. (Questions de cours) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit P un polynôme à coefficients réels et soit x un vecteur propre de f. Montrer que x est également un vecteur propre de $P(f)$.

2. Énoncer le “lemme des noyaux”. (On ne demande pas de le démontrer).

Pas de corrigé : Ce sont des questions de cours !

Exercice 4. On note A la matrice à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Calculer le polynôme caractéristique de u et l'espace propre E_2 associé à u pour la valeur propre 2.
2. Montrer que u n'est pas diagonalisable.
3. Justifier que u est trigonalisable sans effectuer la trigonalisation.
4. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure, et expliciter cette matrice.
5. Soit (f_1, f_2, f_3) une base de E dans laquelle la matrice T de u est triangulaire supérieure.
   (a) Quelle est la diagonale de T ?
   (b) Montrer que $f_1 \in E_2 \setminus \{0\}$.
   (c) Montrer que $f_2 \notin E_2$.
   (d) Montrer que $f_2 \in \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
   (e) Montrer que $f_3 \notin \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
6. L'objectif de cette question est de prouver l'énoncé réciproque des résultats accumulés à la question précédente.
   Soit (g_1, g_2, g_3) un triplet de vecteurs de E. On suppose que $g_1 \in E_2 \setminus \{0\}$, $g_2 \in \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2 \setminus E_2$ et $g_3 \notin \operatorname{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.
   (a) Montrer que (g_1, g_2, g_3) est une base de E.
   (b) Montrer que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure.

Corrigé.

1. On effectue le calcul de p_A que je n'écris pas ici. Il est recommandé - mais pas indispensable - de commencer par le remplacement de C_3 par $C_3 - C_1$ (ou bien sûr de C_1 par $C_1 - C3$), qui est bien tentant d'une part parce que ça fait apparaître un 0 et d'autre part parce que ça fait apparaître du $2 - X$ et que l'énoncé qui parle de la “valeur propre 2” encourage l'apparition du $2 - X$. Cela étant, la seule chose importante est de bien trouver $-(X - 2)^3$.
   Un calcul pas bien méchant non plus conclut que E_2 est la droite de base $((1, 0, -1))$.
2. Il y a en tout et pour tout une droite de vecteurs propres : ceci n'est pas suffisant pour diagonaliser u !
3. Le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}$: cet endomorphisme est donc trigonalisable.
4. Notons $v = u - 2\,\mathrm{Id}$. On va trigonaliser v dans un premier temps. Prenons un vecteur e_3 au hasard, disons $e_3 = (0, 0, 1)$. Puis posons $e_2 = v(e_3)$ soit explicitement $e_2 = (-2, 1, 3)$. Posons enfin $e_1 = v(e_2)$ soit explicitement $e_1 = (1, 0, -1)$. On écrit la matrice P des composantes de ces trois vecteurs, soit : $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   Le rang de P est le même que celui de la matrice Q obtenue en y remplaçant C_2 par $C_2 + 2C_1$, laquelle matrice est échelonné à rang évidemment égal à 3. On en conclut que P est aussi de rang 3, et donc que (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

On remarque enfin que $v(e_1) = 0$.

Avec les informations connues jusqu'ici on remplit sans mal les neuf cases de la matrice de v dans cette base : c'est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Yapluka rajouter $2I$ pour lire la matrice de u : celle-ci est donc $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. (a) Les matrices T et A sont deux matrices du même endomorphisme : elles ont donc même polynôme caractéristique. Ceci entraîne que la diagonale de T accumule trois entrées égales à 2.

   Pour en parler plus confortablement notons les coefficients restants de T par exemple $T = \begin{pmatrix} 2 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) On lit sur T que $u(f_1) = 2f_1$. Par ailleurs $f_1 \neq 0$ puisqu'il figure dans une base. D'où la relation $f_1 \in E_2 \setminus \{0\}$.

   (c) Si f_2 était dans E_2, ce dernier serait au moins un plan puisqu'il contiendrait f_1 et f_2 - or on a calculé au 1) que c'est une droite. On conclut que $f_2 \notin E_2$.

   (d) On lit ensuite sur T que $(u - 2\,\mathrm{Id})^2(f_2) = (u - 2\,\mathrm{Id})(xf_1) = xu(f_1) - 2xf_1 = 2xf_1 - 2xf_1 = 0$. Donc $f_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.

   (e) Si f_3 était dans $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$ les trois vecteurs f_1, f_2 et f_3 y seraient donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ y serait - y compris le vecteur e_3 utilisé à la question précédente. Mais en cette question précédente on a calculé $(u - 2\,\mathrm{Id})^2(e_3)$ et on a trouvé e_1 qui n'était pas nul. C'est donc que f_3 n'est pas dans $\mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$.

6. (a) Soit λ, μ et ν trois réels, supposons que $\lambda g_1 + \mu g_2 + \nu g_3 = 0 \quad (*)$. En appliquant $(u - 2\,\mathrm{Id})^2$ à $(*)$ on obtient : $\nu(u - 2\,\mathrm{Id})^2(g_3) = 0$. Comme $g_3 \notin \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id})^2$, c'est donc que $\nu = 0$. Sachant ceci, on applique alors $(u - 2\,\mathrm{Id})$ à $(*)$: on obtient $\mu(u - 2\,\mathrm{Id})(g_2) = 0$. Comme $g_2 \notin E_2$, c'est donc que $\mu = 0$. Il ne reste plus dans $(*)$ que l'information $\lambda g_1 = 0$. Comme g_1 n'est pas nul, c'est que $\lambda = 0$. La famille (g_1, g_2, g_3) est libre dans $\mathbb{R}^3$ et formée de trois vecteurs : c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Notons S la matrice de u dans cette base. Comme $u(g_1) = 2g_1$, la première colonne de S est $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ensuite, comme $(u - 2\,\mathrm{Id})^2(g_2) = 0$, on peut s'apercevoir que $(u - 2\,\mathrm{Id})(g_2) \in \mathrm{Ker}(u - 2\,\mathrm{Id}) = E_2$. Or celui-ci est une droite (vu le 1)) et g_1 est une base de cette droite : il existe donc un réel x pour lequel $(u - 2\,\mathrm{Id})(g_2) = xg_1$, autrement dit pour lequel $u(g_2) = xg_1 + 2g_2$. La deuxième colonne de S est alors $\begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sans même réfléchir à la troisième colonne, on conclut alors que S est triangulaire supérieure.