Partie commune - Devoir numéro 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle**.

Les exercices sont indépendants.

Partie Algèbre

Exercice 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$A(a,b,c) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b et c.
2. Dans cette partie on pose $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$ dans $A(a,b,c)$, et on note B la matrice ainsi obtenue.
   2.1 La matrice B est-t-elle inversible ? Si oui, déterminer la matrice inverse B^{-1}.
   2.2 Calculer le rang de B.
   2.3 Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ est B. Déterminer une base du $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Dans cette partie on pose $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$ dans $A(a,b,c)$, et on note C la matrice ainsi obtenue.
   3.1 Calculer le rang de C.
   3.2 Soit $v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ est C. Déterminer une base du $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
   3.3 On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ suivante
   $$\mathcal{B} = (\epsilon_1 = (1,-1,0,0), \epsilon_2 = (0,0,1,-1), \epsilon_3 = (1,0,0,0), \epsilon_4 = (0,1,1,1)).$$
   Calculer la matrice de l'application v dans la base $\mathcal{B}$.
4. Est-ce que les matrices B (du point 2.) et C (du point 3.) sont semblables ?
   Si oui, déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1} \cdot C \cdot P$.
5. Les matrices B et C sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. Soit $a \neq 0$ dans $\mathbb{R}$. On veut calculer le déteminant D_n de la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en fonction de n.

$$\begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a $D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$.
3. En déduire la valeur de D_n.

Partie Analyse

Exercice 3. On étudie la série de terme général $x_n = \dfrac{(1+i)^n}{(n+1)a^n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer le module de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $a > \sqrt{2}$ la serie converge absolument.
2. Que peut-on dire sur la convergence de la série si $a < \sqrt{2}$?
3. Enoncer le critère d'Abel. Pour $a = \sqrt{2}$ utiliser le critère d'Abel pour montrer que la série converge.

Exercice 4. Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ de terme général

$$y_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

Exercice 5. On considère deux séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$$

1. Montrer que ces deux séries convergent.
2. Donner l'expression du terme général, noté w_n, de la série produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
3. Montrer que pour $\forall n \geq 1$, on a
$$|w_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)}.$$
4. Déterminer la nature de la serie de terme générale $z_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+2)}$.
5. Que peut-on dire sur la nature de la série produit $\sum w_n$?
6. Enoncer le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries. Expliquer pourquoi ce théorème ne s'applique pas ici ?