Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2015-2016

Math III - PMI Durée : 1h30

Partie commune - Devoir numéro 2 - Corrigé

Partie Algèbre

Exercice 1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

$$A(a,b,c) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $A(a,b,c)$ en fonction de a, b et c.
   Le déteminant de $A(a,b,c)$ est $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc$.
2. Dans cette partie on pose $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$ dans $A(a,b,c)$, et on note B la matrice ainsi obtenue.
   2.1 La matrice B est-t-elle inversible ? Si oui, déterminer la matrice inverse B^{-1}.
   Le déteminant de B est égal à $4 \neq 0$ donc la matrice est inversible. Sa matrice inverse est
   $$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   2.2 Calculer le rang de B.
   Comme $\det(B) \neq 0$ *le rang est maximum donc* 4.
   2.3 Soit $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ est B. Déterminer une base du $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
   Comme le $\mathrm{rang}(B) = 4$ *l'application est surjective et donc aussi injective (u est un endomorphisme).*
3. Dans cette partie on pose $a = 1$, $b = 1$ et $c = 0$ dans $A(a,b,c)$, et on note C la matrice ainsi obtenue.
   3.1 Calculer le rang de C.
   On voit facilement que le rang $C = 3$. *On remarque que les deux dernières lignes et colonnes sont égales, et que la matrice obtenue après suppression de la dernière ligne et colonne a rang égal à 3.*
   3.2 Soit $v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$ est C. Déterminer une base du $\mathrm{Ker}(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$. Montrer que $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
   Comme le $\mathrm{rang}(C) = 3$, *la dimension de* $\mathrm{Ker}(v) = 1$, *et une base de* $\mathrm{Ker}(u)$ *est donnée par* $e_3 - e_4 = (1,-1,0,0)$ *(encore on observant que les deux dernières colonnes sont égales). Une base de l'image est donnée par* $(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,0)$, *qui sont les images de vecteurs* e_1, e_2, e_3, *de la base canonique de* $\mathbb{R}^4$, *(les première trois colonnes de la matrice* C*).*

3.3 On considère la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$\mathcal{B} = (\epsilon_1 = (1,-1,0,0), \epsilon_2 = (0,0,1,-1), \epsilon_3 = (1,0,0,0), \epsilon_4 = (0,1,1,1)).$$

Calculer la matrice de l'application v dans la base $\mathcal{B}$.

On remarque que $C \cdot \epsilon_1 = -\epsilon_1$, $C \cdot \epsilon_2 = 0$, et $C \cdot \epsilon_3 = \epsilon_4$. Il nous reste à calculer $C \cdot \epsilon_4 = (3,2,1,1)$ Or, il faut trouver les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$. En résolvant un système on obtient $(3,2,1,1) = -1\epsilon_1 + 0\epsilon_2 + 4\epsilon_3 + 1\epsilon_4$, d'où

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Est-ce que les matrices B (du point 2.) et C (du point 3.) sont semblables ?

   Non, car il n'ont pas même déterminant/rang.

   Si oui, déterminer une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1} \cdot C \cdot P$.

5. Les matrices B et C sont-elles équivalentes ?

   Non, car il n'ont pas même rang.

Exercice 2. Soit $a \neq 0$ dans $\mathbb{R}$. On veut calculer le déteminant D_n de la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en fonction de n.

$$\begin{pmatrix} 2a & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 2a & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 2a \end{pmatrix}.$$

1. Calculer D_1, D_2 et D_3.

   $D_1 = 2a$, $D_2 = 3a^2$, $D_3 = 4a^3$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a $D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$. *Il suffit de développr par rapport à la première ligne.*

3. En déduire la valeur de D_n.

   En utilisant le point précédent, un raisonnement par récurrence montre que $D_n = (n+1)a^n$.

Partie Analyse

Exercice 3. On étudie la série de terme général $x_n = \dfrac{(1+i)^n}{(n+1)a^n}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer le module de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $a > \sqrt{2}$ la serie converge absolument.

   Le module $\left| \dfrac{(1+i)^n}{(n+1)a^n} \right| = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{(n+1)a^n}$. On a $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \dfrac{\sqrt{2}}{a}$. Pour $a > \sqrt{2}$ la règle de D'Alembert assure que la série $\sum x_n$ est absolument convergent, donc convergente.

2. Que peut-on dire sur la convergence de la série si $a < \sqrt{2}$?

   Pour $a < \sqrt{2}$ la suite $(|x_n|)$ ne tend pas vers 0, donc (x_n) non-plus. La série $\sum x_n$ est alors grossièrement divergente.

3. Enoncer le critère d'Abel. Pour $a = \sqrt{2}$ utiliser le critère d'Abel pour montrer que la série converge.

   Critère d'Abel : Soient $(u_n)_{n\in N}$ et $(v_n)_{n\in N}$ deux suites complexes. On suppose

   - que la suite $(v_n)_{n\in N}$ converge vers 0 et que la série $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge,

   - que la suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est bornée.

   Alors, la série $\sum u_n v_n$ converge.

   (On peut considerer aussi une version de critère d'Abel, avec les conditions comme suit :

   - la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ bornée, et

   - la suite v_n réelles décroissante et conevrgente vers 0.)

   Ici : pour $a = \sqrt{2}$ on a $x_n = \dfrac{(e^{i\pi/4})^n}{n+1}$ le critère d'Abel est appliqué avec $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $u_n = (e^{i\pi/4})^n$. On a

$$\left|\sum_{n=1}^{k}(e^{i\pi/4})^n\right| = \left|\frac{1-(e^{i\pi/4})^{n+1}}{1-e^{i\pi/4}}\right| \leq \left|\frac{2}{1-e^{i\pi/4}}\right|,$$

   ce qui permet de conclure que x_n converge si $a = \sqrt{2}$.

Exercice 4. Etudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ de terme général

$$y_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

D'abord $y_n \sim \frac{1}{n^2}$ et par consequent la série $\sum y_n$ est convergente. Pour calculer la somme on remarque que

$$y_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+3}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{4}.$$

Exercice 5. On considère deux séries de termes généraux

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$$

1. Montrer que ces deux séries convergent. *Par le critère des séries alternée ces deux séries convergent.*
2. Donner l'expression du terme général, noté w_n, de la série produit de Cauchy des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

   $w_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\ \frac{1}{\ln(n-k+2)}$.

3. Montrer que pour $\forall n \geq 1$, on a $|w_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)}$.

   En effet, pour $\forall k \leq n$ *on a* $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\ln(n-k+2)} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)}$ *d'où*

   la somme $|w_n| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)}$.

4. Déterminer la nature de la serie de terme générale $z_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+2)}$.

   Cette série diverge grossièrement par les croissances comparés de numerateur et denominateur.

5. Que peut-on dire sur la nature de la série produit $\sum w_n$?

   On remarque que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)} = (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\ln(n+2)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\ln(n+2)}$. *Cela se resume en* $|w_n| \geq z_n$ *et on a vu que la série* $\sum z_n$ *diverge groissièrement. Donc la série* $\sum w_n$ *diverge.*

6. Enoncer le théorème sur le produit de Cauchy de deux séries. Expliquer pourquoi ce théorème ne s'applique pas ici ?

   Produit de Cauchy : Si $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge absolument, alors la série produit de Cauchy* $\sum w_n$ *converge absolument. Le terme général est* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

   Ici les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *et* $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ *ne convergent pas absolument.*