Exercice 1

1) Soit $n \geqslant 0$. On sait que : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) Soit $n \geqslant 0$. Par le 1) on calcule $\sum_{k=0}^{n} U_k = \sum_{k=0}^{n} 2^k = \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1$

puis $\left(1+\sum_{k=0}^{n} U_k\right)^2 = (2^{n+1})^2 = 2^{2n+2}$

D'autre part on calcule $\sum_{k=0}^{n} U_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (2^k)^2 = \sum_{k=0}^{n} 4^k = \dfrac{4^{n+1}-1}{4-1} = \dfrac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

puis $1+3\sum_{k=0}^{n} U_k^2 = 1+\frac{3}{3}(4^{n+1}-1) = 4^{n+1} = 2^{2n+2}$.

3) a) (E_0) s'écrit : $(1+x_0)^2 = 1+3x_0^2$

Soit : $1+2x_0+x_0^2 = 1+3x_0^2$

soit : $2x_0^2-2x_0=0$

soit : $x_0(x_0-1)=0$ donc $x_0=0$ ou $x_0=1$. Il est supposé que $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $x_0 = 1$

b) (E_1) s'écrit : $(1+x_0+x_1)^2 = 1+3x_0^2+3x_1^2$

Vu le a) cela fournit : $(2+x_1)^2 = 4+3x_1^2$

Soit : $4+4x_1+x_1^2 = 4+3x_1^2$

Soit : $2x_1^2-4x_1=0$

Soit : $x_1(2x_1-4)=0$ donc $x_1=0$ ou $x_1=2$. Vu que $x_1>0$ on conclut que $x_1=2$

c) Notons (H_n) l'énoncé : « $x_n = 2^n$ ».

* (H_0) a été prouvé en a)
* Soit $n \geqslant 0$. Supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, (H_k) est vrai.

On en déduit, vu les calculs déjà faits au 2, que $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} U_k = 2^{n+1}-1$

et que $\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} U_k^2 = \frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$

Dans l'identité (E_{n+1}), réinjectons ces deux informations. On obtient :

$$\left(2^{n+1}+x_{n+1}\right)^2 = 1+(4^{n+1}-1)+3x_{n+1}^2 = 4^{n+1}+3x_{n+1}^2$$

Or $(2^{n+1}+x_{n+1})^2 = 4^{n+1}+2\times 2^{n+1}x_{n+1}+x_{n+1}^2$

On obtient : $2x_{n+1}^2 - 2\times 2^{n+1}x_{n+1} = 0$

Soit : $x_{n+1}(x_{n+1}-2^{n+1}) = 0$. Vu que $x_{n+1} \in \mathbb{R}^{+*}$, on en déduit que $x_{n+1} = 2^{n+1}$.

On conclut des deux "*" que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'énoncé (H_n) est vrai.

Exercice 2

1) (a) Par dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = a\,ch'(ax) = a\,sh(ax)$$

puis $g''(x) = a^2\,sh'(ax) = a^2\,ch(ax)$ et enfin $g'''(x) = a^3\,ch'(ax) = a^3\,sh(ax)$

(b) On va montrer par récurrence sur n l'énoncé

$$(H_n) : \ll \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(n)}(x) = a^n \frac{e^{ax} + (-1)^n e^{-ax}}{2} \gg$$

* (H_1) a été constaté au a)
* Soit $n \geq 1$, supposons (H_n). Alors, par dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = a^n \frac{a e^{ax} - (-1)^n a e^{-ax}}{2} = a^{n+1} \frac{e^{ax} + (-1)^{n+1} e^{-ax}}{2} \text{ : c'est } (H_{n+1})$$

On conclut que (H_n) est vraie pour tout $n \geq 1$. Dit autrement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

si n est pair $g^{(n)}(x) = a^n\,ch(ax)$; si n est impair $g^{(n)}(x) = a^n\,sh(ax)$.

2) (a) Par dérivation de produits, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$$ puis

$$f''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$ et enfin

$$f'''(x) = e^{-x} - (x-2)e^{-x} = (3-x)e^{-x}$$

(b) On va montrer par récurrence sur n l'énoncé :

$$(H_n) : \ll \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n (x-n)e^{-x} \gg$$

* (H_1) a été constaté au a)
* Soit $n \geq 1$, supposons (H_n). Alors, par dérivation d'un produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = (-1)^n \left[e^{-x} - (x-n)e^{-x}\right] = (-1)^n \left[(n+1) - x\right] e^{-x}$$

$$= (-1)^{n+1} (x - (n+1)) e^{-x} \text{ : c'est } (H_{n+1})$$

On conclut que (H_n) est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3

1). Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = 0 \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff (x+1)(x-2) = 0$

$\iff x = -1$ ou $x = 2$

Donc $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \{-1, 2\}$

. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $y \in \mathbb{R} \iff \exists x \in \mathbb{R},\ y = x^2 - x - 2$

$\iff \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - (y+2) = 0$

$\iff$ l'équation "$x^2 - x - (y+2) = 0$" a au moins une solution réelle

$\iff$ son discriminant est positif

$\iff 1 + 4(y+2) \geq 0$

$\iff 4y \geq -9$

$\iff -\frac{9}{4} \leq y$

On conclut que $I = [-\frac{9}{4}, +\infty[$

Variante 1 : on réécrit $f(x) = (x^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times x) - 2$

$= (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$

Il est "clair" que quand x varie, $x - \frac{1}{2}$ parcourt $\mathbb{R}^+$. Donc $f(x)$ parcourt $[-\frac{9}{4}, +\infty[$

Variante 2 : on calcule, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x - 1$ et on l'utilise pour bâtir un tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	$-9/4$	$\nearrow$	$+\infty$

On affirme alors "lire" $I = [-\frac{9}{4}, +\infty[$ sur ce tableau - appelant plus ou moins implicitement le théorème de la bijection pour une restriction de la fonction continue f.

2) Le plus simple est de calculer, pour $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, $f'(x) = 2x - 1$ et constater que si $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$, $0 < f'(x)$.

On en déduit que f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$, puis qu'elle est injective sur cet intervalle.

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}$ On remarque que $h(x) = f(e^x)$

Donc $h(x) = 0 \iff f(e^x) = 0 \iff e^x \in \{-1, 2\} \iff e^x = 2 \iff x = \ln 2$

b) * Si $y \in h(\mathbb{R})$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $y = h(x) = f(e^x)$ donc $y \in f(\mathbb{R}) = [-\frac{9}{4}, +\infty[$

Donc $h(\mathbb{R}) \subset [-\frac{9}{4}, +\infty[$ et donc $h(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$: h n'est pas surjective

* On constate que $\left.\begin{array}{l} h(\ln(\frac{1}{3})) = f(\frac{1}{3}) = -\frac{20}{9} \\ h(\ln(\frac{2}{3})) = f(\frac{2}{3}) = -\frac{20}{9} \end{array}\right\}$ h n'est donc pas injective.

Exercice 4

1) FAUX cf. $A=\{1,2\}$ $B=\{1,3\}$ $C=\{2,3\}$

2) VRAI Soit E,F deux ensembles, soit $f:E\to F$

Alors $f^{-1}(F)=\{x\in E \mid f(x)\in F\}$

Or pour tout $x\in E$, $f(x)\in F$

Donc $f^{-1}(F)=E$

3) VRAI Soit E ensemble, soit $g:E\to E$ et supposons $g\circ g\circ g=Id_E$

Posons alors $h=g\circ g : E\to E$

On constate que $h\circ g=(g\circ g)\circ g = g\circ g\circ g = Id_E$

et $g\circ h = g\circ(g\circ g) = g\circ g\circ g = Id_E$

Ainsi h est une réciproque de g : g est donc bijective

4) VRAI Soit $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, cherchons les antécédents de (s,t)

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Alors (x,y) est un antécédent de (s,t)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=s \\ 2x+5y=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=s \\ -y=-2s+t \end{cases} \quad L_2-2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=s \\ y=2s-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5s+3t \\ y=2s-t \end{cases} \quad L_1-3L_2$$

On a trouvé un antécédent et un seul : f est donc bijective.

5) FAUX Soit $b\in\mathbb{R}$. Cherchons les antécédents de 1 par f_b

Soit $t\in\mathbb{R}$. Alors t est antécédent de 1

$$\Leftrightarrow t^2+bt=1$$
$$\Leftrightarrow t^2+bt-1=0$$

Le discriminant de cette équation est b^2+4. Il est strictement positif.

Il y a donc deux antécédents de 1 par f_b, qui n'est donc pas injective.