Devoir n° 1. Corrigé
Partie commune

Exercice 1.

1. *Démontrer qu'il existe* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{N}^\star$ $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}$.
2. *Montrer que, pour tout* $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}$.
3. *En déduire la limite de* $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ *quand* $n \to \infty$.

Corrigé :

1. En effet, $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} + \dfrac{(-1)}{k+2}$.
2. Ici, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$.
3. La limite $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{3}{2}$, car la limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = \frac{0}{1} = 0$$

Exercice 2. *On se propose de calculer de deux façons différentes la somme* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, *où* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^n \end{array}$$

   (a) *Calculer sa dérivée* f'.
   (b) *Exprimer* $(x+1)^n$ *en tant que polynôme en* x *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*
   (c) *Calculer la dérivée du polynôme obtenu.*
   (d) *Trouver la somme* S_n.
2. (a) *Vérifier que pour tout entier* k *tel que* $1 \leq k \leq n$ *on a* $k\dbinom{n}{k-1} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   (b) *Retrouver ainsi la valeur de* S_n *en utilisant la formule du binôme de Newton.*
3. *Soit* $n \geq 2$. *A-t-on* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$?

Corrigé

1. (a) La dérivée $f'(x) = n(x+1)^{n-1}$.
   (b) La formule du binôme de Newton donne $(x+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

(c) La dérivée du polynôme $(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k)' = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

(d) Dans la dérivée du polynôme on reconnaît la somme recherchée S_n au point $x = 1$. Or, on vient de montrer que cette dérivée est égale à $n(x+1)^{n-1}$. Au point $x = 1$, on obtient $\boxed{n \cdot 2^{n-1}}$.

2. (a) Le terme de gauche donne $k\binom{n}{k} = \frac{k \cdot n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$. Le terme de droite donne la même expression car : $n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$.

(b) La somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k \cdot 1^{(n-1)-k}$-
$= n(1+1)^{n-1} = \boxed{n \cdot 2^{n-1}}$.

3. Soit $n \geq 3$. La réponse est non. En effet, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ tandis que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et la somme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ donc $n \cdot 2^{n-1} \neq \frac{n(n+1)}{2} \cdot 2^n$ pour l'entier $n$consideré.

Exercice 3. *Justifier l'existence et déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :*
$A = \{\ |2x+5y|\ ;\ x \in [0,4],\ y \in [-3,1]\ \}, B = \{\ y(2-x)\ ;\ (x,y) \in [-1,1] \times [-1,4]\ \}$.
Corrigé On a $0 \leq x \leq 4$ et $-3 \leq y \leq 1$. On remarque que $0 \leq 2x \leq 8$ et $-15 \leq 5y \leq 5$. On peut ajouter les deux encadrements : $-15 \leq 2x+5y \leq 13$ ce qui donne pour la valeur absolue : $0 \leq |2x+5y| \leq 15$. Comme ses bornes sont atteintes en $(x,y) = (0,0)$ et $(0,-3)$ respectivement, le minimum est 0 et le maximum est 15.
On a $-1 \leq x \leq 1$ et $-1 \leq y \leq 4$, donc $1 \leq 2-x \leq 3$.
– Supposons $y \geq 0$. Comme $0 \leq y \leq 4$ et $1 \leq 2-x \leq 3$, on obtient par multiplication de valeurs positives dans les encadrements $0 \leq y(2-x) \leq 12$.
– Supposons maintenant que $y \leq 0$. Comme $0 \leq -y \leq 1$ et $1 \leq 2-x \leq 3$, on obtient par multiplication de valeurs positives dans les encadrements $0 \leq -y(2-x) \leq 3$. Donc en inversant les inégalités $-3 \leq y(2-x) \leq 0$.
Dans tous les cas, on a $-3 \leq y(2-x) \leq 12$. -3 est atteint pour $(-1,-1)$ et 12 est atteint pour le point $(-1,4)$. Ainsi, le minimum est -3 et le maximum est 12.

Exercice 4. Corrigé

1. *Pour tout réel x positif, on a $x^3 \geq x$.*
– Faux. La fonction $x \mapsto (x^3 - x)$ n'est pas positive pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ (seulement pour $x \geq 1$). Par exemple on a $\frac{1}{2} > \frac{1}{2^3}$.
2. *Il existe un réel x tel que $x^6 + 6x^3 + 9 = 0$.*
– Vrai. Un réel x tel que $x^3 = -3$ satisfait l'équation. Un tel réel x existe et est noté $\sqrt[3]{-3}$.
3. *Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$.*
– Vrai. La fonction carré $t \mapsto t^2$ prend ses valeurs dans $[0,+\infty[$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$ est un carré donc est positif.
4. *Il existe un réel négatif x et un réel z tels que $|x-z| = 2$ et $|x+z| = 3$.*
– Vrai. $x = -2.5, z = -0.5$.
5. *Pour tout réel x, $(x+1 < 1) \Rightarrow (x+1 \leq 1)$.*
– Vrai. Pour tout réel x, $(x+1 < 1) \Leftrightarrow (x+1 \leq 1$ et $x \neq 1)$ donc en particulier, $(x+1 < 1) \Rightarrow (x-1 \leq 1)$.
6. $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+1 = 0)$ *et* $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+2 = 0)$.
– Vrai. $(x = -1)$ et $(x = -2)$ $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+1 = 0)$ et $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+2 = 0)$
7. *Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $|a-b| = 3, |b-c| = 4$ et $|a-c| = 8$.*
– Faux. Par l'inégalité triangulaire on devrait avoir $|a-b| + |b-c| \geq |(a-b)+(b-c)| = |a-c|$, ce qui donne une inégalité fausse dans ce cas là : $3 + 4 \geq 8$.