
Devoir n° 1
Partie commune

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Il veillera à justifier soigneusement toutes ses réponses. Si un étudiant est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les exercices sont réputés indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. À l'intérieur d'un exercice, lorsqu'un étudiant ne peut répondre à une question, il lui est vivement recommandé de poursuivre en admettant le résultat qu'il lui était demandé de démontrer.

Exercice 1.

1. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$
$$\frac{2}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}.$$
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)}.$$
3. En déduire la limite de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2. On se propose de calculer de deux façons différentes la somme
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

1. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (x+1)^n \end{array}$$
   (a) Calculer sa dérivée f'.
   (b) Exprimer $(x+1)^n$ en tant que polynôme en x à l'aide de la formule du binôme de Newton.
   (c) Calculer la dérivée du polynôme obtenu.
   (d) Trouver la somme S_n.
2. (a) Vérifier que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$ on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
   (b) Retrouver ainsi la valeur de S_n en utilisant la formule du binôme de Newton.
3. Soit $n \geq 3$. A-t-on $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$?

Exercice 3. Justifier l'existence et déterminer le minimum et le maximum des ensembles qui suivent :

$$\begin{aligned} A &= \{\ |2x+5y|\ ;\ x \in [0,4],\ y \in [-3,1]\ \} \\ B &= \{\ y(2-x)\ ;\ (x,y) \in [-1,1] \times [-1,4]\ \}\ . \end{aligned}$$

Exercice 4. Pour chacune des propositions, décider si elle est vraie ou fausse, et surtout *justifier avec précision* cette réponse par une démonstration ou un contre-exemple. Attention : aucune réponse ne sera prise en compte sans justification.

1. Pour tout réel x positif, on a $x^3 \geq x$.
2. Il existe un réel x tel que $x^6 + 6x^3 + 9 = 0$.
3. Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$.
4. Il existe un réel négatif x et un réel z tels que $|x-z| = 2$ et $|x+z| = 3$.
5. Pour tout réel x, $(x+1 < 1) \Rightarrow (x+1 \leq 1)$.
6. $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+1 = 0)$ et $(\exists\ x \in \mathbb{R},\ x+2 = 0)$
7. Il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $|a-b| = 3, |b-c| = 4$ et $|a-c| = 8$.