Université Claude Bernard - Lyon 1 Printemps 2014
Math II - PMI/CCP Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 3
Les calculatrices ne sont pas autorisées
Les deux exercices sont absolument indépendants l'un de l'autre

---

Exercice 1
Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $n+1$ réels distincts $a_0, \dots, a_n$.
Pour tout k entre 0 et n, on note $e_k = (1, a_k, \dots, a_k^n)$, qui est un vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$.
L'objectif de l'exercice est de montrer que $(e_0, \dots, e_n)$ est une famille libre.
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$.
On note F la fraction rationnelle :

$$F = \frac{\lambda_0}{X - a_0} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - a_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X - a_k}.$$

1) Soit a un réel. Montrer que quand x tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{x-a} = \sum_{l=0}^{n} \frac{a^l}{x^{l+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

2) Déduire de la question précédente que $F(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

3) a) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ pour lequel :

$$F = \frac{Q}{(X - a_0) \cdots (X - a_n)}.$$

b) Montrer que $F = 0$.

4) Conclure.

Exercice 2
Dans cet exercice on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications deux fois dérivables de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ qui vérifient :

$$f(-1) = -1 \quad f(1) = 1 \qquad f'(-1) = f'(1) = 0.$$

Première partie
L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

$$(E) \qquad \text{Pour toute } f \in \mathcal{E}, \text{ il existe un } c \in [-1, 1] \text{ tel que } |f''(c)| > 2.$$

Pour f application de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ on note $\tilde{f}$ l'application de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ définie par :

$$\tilde{f}(t) = -f(-t).$$

1) a) Montrer que si f est deux fois dérivable sur $[-1, 1]$, $\tilde{f}$ l'est aussi et :

$$\{|f''(t)|\,;\, -1 \leq t \leq 1\} = \{|(\tilde{f})''(s)|\,;\, -1 \leq s \leq 1\}$$

b) Montrer que si $f \in \mathcal{E}$, alors $\tilde{f} \in \mathcal{E}$.

2) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à un ordre judicieux entre -1 et 0, montrer que si $f \in \mathcal{E}$ et $f(0) > 0$, alors il existe $c \in [-1, 1]$ tel que $|f''(c)| > 2$.

3) En appliquant la question précédente à $\tilde{f}$, montrer que si $f \in \mathcal{E}$ et $f(0) < 0$, alors il existe $c \in [-1, 1]$ avec $|f''(c)| > 2$.

4) On va montrer (E) par l'absurde. Pour ce faire, on suppose donc que f est une fonction de $\mathcal{E}$ telle que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|f''(t)| \leq 2$.

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Pour $t \in [-1, 0]$, on pose $g(t) = (t+1)^2 - f(t)$. Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g'(-1)$ et $g''(t)$ pour $t \in [-1, 0]$ puis montrer que pour tout $t \in [-1, 0]$, $g(t) = 1$ et donc que pour tout $t \in [-1, 0]$, $f(t) = t^2 + 2t$.

c) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = -t^2 + 2t$.

d) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f'(t) = 2 - 2|t|$.

e) Conclure.

Deuxième partie

L'objectif de cette partie est de montrer que la constante 2 qui intervient dans l'énoncé (E) ne peut pas être améliorée.

Pour a réel tel que $2 < a < 3$ et c réel tel que $0 < c < 1$, on définit une application notée $f_{a,c}$ de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ en posant :

$$f_{a,c}(t) = \begin{cases} \dfrac{ac^2}{6} + \dfrac{at^2}{2} + at & \text{pour } t \in [-1, -c[\,; \\ -\dfrac{at^3}{6c} - \dfrac{act}{2} + at & \text{pour } t \in [-c, c]\,; \\ -\dfrac{ac^2}{6} - \dfrac{at^2}{2} + at & \text{pour } t \in]c, 1]. \end{cases}$$

5) Soit a réel tel que $2 < a < 3$ et c réel tel que $0 < c < 1$.

a) Montrer que $f_{a,c}$ est impaire.

b) Montrer que $f_{a,c}$ est continue au point c, puis qu'elle est continue sur $[-1, 1]$.

c) Montrer que $f_{a,c}$ est deux fois dérivable sur $]-c, 1]$, puis qu'elle est deux fois dérivable sur $[-1, 1]$.

d) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, $|{f_{a,c}}''(t)| \leq a$.

6) Montrer que pour tout $a \in]2, 3[$ il existe un $c_a \in]0, 1[$ pour lequel $f_{a,c_a}(1) = 1$.

7) Conclure.