Université Claude Bernard - Lyon 1 | Printemps 2014
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Problème - Devoir numéro 2
Les calculatrices ne sont pas autorisées

On note (T_n) la suite de polynômes à coefficients réels définie par les initialisations $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ et la construction par récurrence, applicable pour tout $n \geq 0$:

$$(*) \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(Ces polynômes sont appelés les polynômes de Tchebycheff de première espèce).

Première partie

1) Expliciter les polynômes T_2, T_3 et T_4.

2) En utilisant la relation $(*)$, montrer par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$, les polynômes T_k et T_{k+1} sont premiers entre eux.

3) a) Pour tout $n \geq 1$, montrer en utilisant une récurrence rédigée avec précision que $T_n(1) = 1$.

b) Sans écrire les détails de la preuve (ce serait une récurrence du même style), préciser les valeurs de $T_n(-1)$ puis de $T_n(0)$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, le degré de T_n est égal à n, et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 0$ et tout α réel :

$$(**) \qquad T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha).$$

b) Montrer que pour tout k entier relatif,

$$T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)\right) = 0.$$

c) Montrer que les racines de T_n sont les réels :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

d) Déterminer toutes les racines de T_n'.

5) Soit $n \geq 0$ un entier fixé. Montrer que T_n est l'unique polynôme Q tel que pour tout réel α, $Q(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$.

6) Soit x fixé avec $x > 1$. En appliquant $(*)$ à x et en utilisant les techniques concernant les suites définies par une relation de récurrence linéaire, fournir une expression explicite de $T_n(x)$, valable pour tout $n \geq 0$.

Deuxième partie

On s'intéresse à la famille d'équations différentielles suivante, où λ est un paramètre réel :

$$(E_\lambda) \qquad (X^2-1)P'' + XP' - \lambda P = 0.$$

On en recherche des solutions polynomiales.

7) Soit P un polynôme non nul solution de l'une des équations (E_λ). On note d le degré de P. Montrer que $\lambda = d^2$.

8) Soit λ un réel qui n'est pas le carré d'un entier. Déduire de la question précédente que la seule solution polynomiale de l'équation (E_λ) est la solution nulle.

9) Dans cette question, on fixe un entier $d \geq 0$ et on s'intéresse spécifiquement à l'équation (E_{d^2}).

a) Montrer que toute solution polynomiale non nulle de (E_{d^2}) est de degré d.

b) Soit P_1 et P_2 deux solutions polynomiales de (E_{d^2}) ayant même coefficient dominant. Après avoir remarqué que $P_1 - P_2$ est une solution de (E_{d^2}), montrer que $P_1 = P_2$.

c) En dérivant deux fois par rapport à α l'identité $(**)$, montrer que T_d est solution de (E_{d^2}).

d) Quelles sont les solutions polynomiales de (E_{d^2}) ?