Université Claude Bernard - Lyon 1 | Printemps 2014
Math II - PMI/CCP | Durée : 1 heure et 30 minutes

Partie commune - Devoir numéro 2
Pas de calculettes
Les exercices sont indépendants

Exercice 1
Soit P le polynôme à coefficients réels :

$$P = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 4X + 4.$$

1) Expliciter le polynôme dérivé P'.

2) Calculer explicitement le reste de la division euclidienne de $8P$ par P', reste qui sera noté R dans la suite de l'exercice.

3) Vérifier que R divise P'.

4) Montrer que toute racine complexe de R est une racine de P' et est aussi une racine de P.

5) Factoriser le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 2
Soit α un réel et soit n un entier strictement positif. On note A le polynôme :

$$A = X^{2n} - 2X^n \cos\alpha + 1.$$

1) Factoriser en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $B = X^2 - 2X\cos\alpha + 1$.

2) Soit β un réel. Factoriser en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $C_\beta = X^n - e^{i\beta}$.

3) Factoriser le polynôme A en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

4) Dans cette question, on suppose que $\alpha \notin \pi\mathbf{Z}$. Factoriser le polynôme A en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3
Pour x réel variant dans $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ et $m \geq 1$ entier , on note :

$$f(x) = 1 + xe^x \qquad g(x) = f(x) - \frac{1}{1-x} \qquad h_m(x) = \frac{g(x)}{(\mathrm{Arctan}(2x))^m}.$$

1) Effectuer un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5.

2) Fournir un équivalent très simple de $g(x)$ au voisinage de 0.

3) Sans présupposer son existence, déterminer en discutant selon la valeur de m la limite (finie ou infinie) de $h_m(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures (autrement dit, quand x tend vers 0^+).

Exercice 4

Soit f la fonction d'une variable réelle définie sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par :

$$f(x) = \left(\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}.$$

Sans présupposer son existence, déterminer la limite (finie ou infinie) de $f(x)$ quand x tend vers 0 ($x \neq 0$).

Exercice 5

1) Montrer que $\ln(n+1) \sim \ln n$ quand n tend vers $+\infty$.

2) Montrer que $\ln(n+1) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

3) Déterminer un équivalent simple de la suite u_n définie pour $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

quand n tend vers $+\infty$.