Exercice 1

1) Pour $x \neq 0$ et $x \neq a$, $\dfrac{1}{x-a} = \dfrac{1}{x\,(1-a/x)} = \dfrac{1}{x}(1-\dfrac{a}{x})^{-1}$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{a}{x} \to 0$ donc on peut appeler à l'aide le développement bien connu de $(1-u)^{-1}$ où u tend vers 0 et ça donne en deux lignes le résultat proposé.

2) Quand x tend vers $+\infty$,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{a_k^l}{x^{l+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) \right) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^l\right)}{x^{l+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

On s'aperçoit alors que pour tout l entre 0 et n, le réel $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k^l$ est la l-ème composante du $n+1$-uplet $\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_n e_n$, lequel $n+1$-uplet est nul par hypothèse. Tous ces réels sont donc nuls et il reste seulement le petit o final.

3) a) On explicite le produit $F(X-a_0)\cdots(X-a_n)$. Ça fait :

$$\lambda_0(X-a_1)\cdots(X-a_n) + \lambda_1(X-a_0)(X-a_2)\cdots(X-a_n) + \cdots + \lambda_n(X-a_0)\cdots(X-a_{n-1})$$

et on ne peut que constater qu'on vient d'écrire un polynôme Q.

b) Supposons Q non nul. Il a alors un terme de plus haut degré λX^d où d est un entier positif et λ un réel non nul. On dispose ensuite de l'équivalent $Q(x) \sim \lambda x^d$ quand x tend vers $+\infty$ dont on déduit l'équivalent $F(x) \sim \dfrac{\lambda x^d}{x^{n+1}}$.

Vu la négligeabilité montrée au 2, on obtient $\lambda x^d \to 0$ quand $x \to +\infty$. Ce qui n'est pas raisonnable, absurde même.

4) Le plus élégant - mais peut-être excessivement conceptuel- est de s'apercevoir que la définition de F se révèle être une décomposition en éléments simples de 0. Or il n'y en a qu'une celle où on a écrit 0 comme somme de rien. La définition de F ne contient donc rien : tous les λ_k sont donc nuls. Il est sans doute plus simple de calculer chaque λ_k par le procédé standard (multiplier la définition de F par $X - a_k$ et évaluer en a_k ce qu'on a obtenu) on voit mieux en faisant comme ça où on se sert (discrètement !) que les a_i sont tous distincts.

Exercice 2

1) a) Soit f de $[-1,1]$ vers $\mathbf{R}$, supposons la deux fois dérivable. Par composition de fonctions deux fois dérivables, $\tilde{f}$ l'est également et on dispose des identités : $(\tilde{f})'(s) = f'(-s)$ et $(\tilde{f})''(s) = -f''(-s)$ dont on déduit : $|(\tilde{f})''(s)| = |f''(-s)|$. On obtient alors l'égalité ensembliste suggérée en faisant le changement de variable $t = -s$.

b) Soit $f \in \mathcal{E}$. Vu le a) la fonction $\tilde{f}$ est elle aussi deux fois dérivable, et les valeurs ou valeurs de dérivées en -1 et 1 tombent toutes quatre instanément soit de la définition de $\tilde{f}$ soit de la formule qui explicite la dérivée de $\tilde{f}$.

2) Soit $f \in \mathcal{E}$ vérifiant $f(0) > 0$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,0]$ et deux fois dérivable sur $]-1,0[$, il existe un c dans l'intervalle ouvert (et a fortiori dans $[-1,1]$) pour lequel :

$$f(0) = f(-1) + f'(-1) + \frac{f''(c)}{2} \text{ dont on tire } f''(c) = 2[f(0) - f(-1) - f'(-1)] = 2f(0) + 2 - 0 > 2.$$

3) Soit $f \in \mathcal{E}$ avec $f(0) < 0$. Vu le 1) b), la fonction $\tilde{f}$ est aussi dans $\mathcal{E}$ et on vérifie aussitôt que $\tilde{f}(0) = -f(0) > 0$. On peut donc appliquer le 2) à $\tilde{f}$ assurant l'existence d'un $d \in [-1,1]$ tel que $|\tilde{f}(d)| > 2$. Un

appel au 1 a) fournit alors c (qui est l'opposé de d si on se souvient de comment on a prouvé le 1 a) mais on s'en fiche).

4) a) Au vu du 2) on ne peut avoir $f(0) > 0$ et au vu du 3) on ne peut avoir $f(0) < 0$. Donc $f(0) = 0$.

b) On calcule stupidement $g(-1) = 0^2 - (-1) = 1$ et $g(0) = 1^2 - 0 = 1$ puis $g'(t) = 2(t+1) - f'(t)$ d'où $g'(-1) = 2 \times 0 - 0 = 0$ et enfin $g''(t) = 2 - f''(t)$ d'où $g''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [-1, 0]$.
Dès lors g' est croissante ; comme en outre $g'(-1) = 0$, g' est positive sur $[-1, 0]$, et donc g est croissante. Comme g prend la même valeur aux deux extrémités de l'intervalle, elle est donc constante et vaut la même valeur qu'aux bornes à savoir 1. On n'a plus qu'à réorganiser les termes dans l'identité $g(t) = 1$ pour terminer la question.

c) On applique le b) à la fonction $\tilde{f}$, qui est dans $\mathcal{E}$ par le 1 b), et vérifie l'inégalité $|(\tilde{f})''| \leq 2$ par le 1 a). On en conclut que pour tout $s \in [-1, 0]$, $\tilde{f}(s) = (s+1)^2 - 1$, autrement dit $f(-s) = 1 - (s+1)^2$. Face à un t fixé dans $[0, 1]$ le résultat annoncé pour $f(t)$ s'obtient alors immédiatement en utilisant $s = -t$.

d) En dérivant sur $[-1, 0]$ l'expression trouvée pour f on obtient sur cet intervalle : $f'(t) = 2t + 2$. En recommençant sur $[0, 1]$ on obtient sur cet intervalle : $f'(t) = -2t + 2$. La formule proposée par l'énoncé les synthétise en une seule.

e) Par hypothèse f' est dérivable, notamment en 0. Vu l'expression de f' on en déduit que la fonction $t \mapsto |t|$ est dérivable en 0. Ce qui n'est pas raisonnable, absurde même.

5) a) Il suffit de vérifier que pour $t \in [0, 1]$, $f_{a,c}(-t) = -f_{a,c}(t)$. C'est très clair pour $t \in [0, c]$ (il n'y a que des puissances impaires de t dans l'expression) et guère difficile pour $t \in]c, 1]$, faut l'écrire.

b) La fonction $f_{a,c}$ est clairement continue à gauche en c avec $f_{a,c}(c) = -\frac{2}{3}ac^2 + ac$. Sa limite à droite s'obtient tout de suite à partir de la formule du bas dans la définition de $f_{a,c}$ et on retombe sur $-\frac{2}{3}ac^2 + ac = f_{a,c}(c)$. D'où la continuité à droite.
Par imparité de $f_{a,c}$, cette fonction est donc aussi continue en $-c$. En tous les autres points de l'intervalle, la continuité est évidente.

c) Vu la formule centrale pour $f_{a,c}$, la restriction de cette fonction à $[-c, c]$ est deux fois dérivable, les dérivée et dérivée seconde de cette restriction étant données par les formules :

$$f_{a,c}{}'(t) = -\frac{at^2}{2c} - \frac{ac}{2} + a \qquad \text{puis } f_{a,c}{}''(t) = -\frac{at}{c}.$$

Vu la continuité de $f_{a,c}$ au point c, la formule qui est fournie par la définition pour t variant dans $]c, 1]$ est en fait valable pour t variant dans l'intervalle fermé $[c, 1]$. Comme on l'a fait pour l'intervalle central, on peut affirmer que la restriction de $f_{a,c}$ à cet intervalle de droite est deux fois dérivable, les dérivée et dérivée seconde de cette restriction étant :

$$f_{a,c}{}'(t) = -at + a \qquad \text{puis } f_{a,c}{}''(t) = -a.$$

On en déduit que $f_{a,c}$ est dérivable à gauche et à droite au point c. Les formules écrites ci-dessus permettent d'exprimer les dérivées à gauche et à droite : les deux se révèlent égales à $a - ac$. La fonction $f_{a,c}$ est donc dérivable au point c. On recommence de la même façon pour dériver $f_{a,c}{}'$ qui a manifestement une dérivée à gauche et une dérivée à droite, qui se révèlent être égales puisque toutes deux égales à $-a$. On en conclut que $f_{a,c}{}'$ est dérivable en c.
La dérivabilité deux fois ne pose aucune difficulté aux autres points de $]-c, 1]$. Enfin la dérivabilité deux fois sur $[-1, 1]$ s'obtient par le même argument d'imparité qu'au b).

d) Pour $t \in [-c, c]$, $|f_{a,c}{}''(t)| = a\frac{|t|}{c} \leq a$ puisque $|t| \leq c$ et $0 \leq a$. Pour $t \in [c, 1]$ c'est encore plus simple : $|f_{a,c}{}''(t)| = |-a| = a$. C'est tout aussi facile sur $[-1, -c]$.

6) Soit $a \in]2, 3[$. Pour tout $c \in]0, 1[$, on calcule en un clin d'oeil le réel $f_{a,c}(1) = \frac{a}{2}(1 - \frac{c^2}{3})$; cette expression définit une fonction continue (et même polynomiale) de la variable c. Quand c tend vers 0 l'expression tend vers $a/2$ qui est strictement supérieur à 1 par hypothèse ; quand c tend vers 1 elle tend vers $a/3$ qui est strictement inférieur à 1 par hypothèse. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle prend donc quelque part la valeur 1 (NB : la fonction étant très simple, on peut préférer expliciter c_a comme racine de truc-bidule, c'est tout à fait correct aussi).

7) Je n'ai pas assez de place. (Ce n'est pas très difficile).