NB Ce problème est adapté d'un problème trouvé dans l'ouvrage *Problèmes corrigés de mathématiques supérieures* de Michel Quercia et François Ranty, consulté et consultable à la Bibliothèque Universitaire.

1) On s'attend à ce que vous trouviez : $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2) C'est une récurrence sur k, absolument élémentaire : Il est clair que T_0 et T_1 sont premiers entre eux ; si l'affirmation proposée par l'énoncé est vraie pour un k fixé, on écrit $(*)$ en l'appliquant à $n = k$ et on constante que tout diviseur commun de T_{k+2} et T_{k+1} est aussi un diviseur de T_k, donc un diviseur commun de T_k et T_{k+1}, donc vu l'hypothèse de récurrence une constante. Les polynômes T_{k+2} et T_{k+1} sont donc premiers entre eux.

3) a) On note (H_n) l'hypothèse de récurrence "$T_n(1) = 1$". Celle-ci est vérifiée pour $n = 0$ et pour $n = 1$. Soit maintenant un entier $n \geq 2$ fixé, supposons (H_k) vraie pour tout entier tel que $1 \leq k \leq n-1$. On écrit alors $(*)$ pour $n-2$ qui donne : $T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$. En évaluant cette identité en 1 on obtient $T_n(1) = 2 - 1 = 1$.

b) Par une récurrence structurée exactement de la même façon, on pourrait montrer que pour tout $n \geq 0$, $T_n(-1) = (-1)^n$. Pour $T_n(0)$ ce n'est pas plus compliqué à prouver, mais plus compliqué à énoncer : il vaut 0 si n est impair, $(-1)^{n/2}$ si n est pair.

c) On le montre par récurrence forte sur le degré, en notant (H_k) l'hypothèse :

$$(H_k) \qquad \text{Le degré de } T_k \text{ est } k \text{ et son coefficient dominant } 2^{k-1}.$$

Cette hypothèse est manifestement vérifiée si $k = 1$ et si $k = 2$. Soit un $n \geq 3$, supposons (H_k) vérifiée pour tout k compris entre 1 et n, donc en particulier pour $k = n-1$ et $k = n-2$. On écrit alors $(*)$ pour $n-2$ et dans cette expression le degré de $2XT_{n-1}$ est n tandis que celui de $-T_{n-2}$ est strictement inférieur à n : le degré de leur somme est donc n, son coefficient dominant étant celui de $2XT_{n-1}$ c'est-à-dire 2^n.

4) a) On fixe un α et on fait une récurrence forte sur n. L'initialisation est sans piège ; lorsqu'on a supposé $(**)$ vrai pour toutes valeurs inférieures ou égales à $n+1$ (donc en particulier pour $n+1$ et n) c'est de la routine que de la vérifier pour $n+2$:

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos\alpha) &= 2\cos\alpha\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha)\\
&= 2\cos(\alpha)[\cos(n\alpha)\cos\alpha - \sin(n\alpha)\sin\alpha] - \cos(n\alpha)\\
&= (2\cos^2\alpha - 1)\cos(n\alpha) - 2\cos\alpha\sin\alpha\sin(n\alpha)\\
&= \cos(2\alpha)\cos(n\alpha) - \sin(2\alpha)\sin(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha).
\end{aligned}$$

b) Vu la formule $(**)$, la condition proposée équivaut à $\cos(n\alpha) = 0$, c'est-à-dire à l'existence d'un $k \in \mathbf{Z}$ tel que :

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

c) Au vu de $(**)$, on vérifie presque aussitôt que les valeurs proposées annulent T_n. De plus, comme fonction de k l'expression proposée est strictement croissante et à valeurs dans $[0, \pi]$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement décroissante. Elles forment donc une suite (finie) strictement décroissante et en particulier sont deux à deux distinctes. On a trouvé n racines du polynôme T_n ; or celui-ci est de degré n : on les a donc toutes trouvées.

d) On commence par dériver $(**)$ par rapport à α (pour un n fixé). On obtient :

$$T_n'(\cos\alpha) = \frac{n\sin(n\alpha)}{\sin\alpha}.$$

À partir de cette expression, on suit le même plan qu'à la question précédente. On cherche d'abord des α annulant cette formule ; conviennent les :

$$\alpha = \frac{k\pi}{n}$$

où k parcourt $\mathbf{Z} \setminus n\mathbf{Z}$ (on doit exclure les multiples de n pour que soit possible la division par $\sin(\alpha)$. Par le même argument qu'au d), les valeurs de la fonction cosinus en les α correspondant à $1 \leq k \leq n-1$ sont toutes distinctes et sont des racines de T_n'. Vu qu'elles sont $n-1$ qui est aussi le degré de T_n', on les a toutes trouvées.

5) Soit Q un polynôme rendant vraie l'identité $(**)$. Pour tout α réel, on peut alors écrire :

$$(Q - T_n)(\cos\alpha) = Q(\cos\alpha) - T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) - \cos(n\alpha) = 0.$$

Ainsi pour tout α réel, $\cos\alpha$ est racine du polynôme $Q - T_n$. Or l'ensemble des valeurs prises par la fonction cosinus, égal à $[-1, 1]$, est infini. Le polynôme $Q - T_n$ a donc une infinité de racines : il est donc nul, d'où $Q = T_n$.

6) Dans l'esprit de la question, pour tout $n \geq 0$, notons $u_n = T_n(x)$.
Avec cette notation, la relation $(*)$ appliquée au réel x s'écrit :

$$u_{n+2} = 2xu_{n+1} - u_n.$$

On sait reconstituer les suites de cette forme : on les trouve en introduisant l'équation dite "caractéristique" à l'inconnue notée r :

$$r^2 = 2xr - 1$$

de discriminant $4(x^2 - 1) > 0$ vu l'hypothèse $1 < x$. Je n'écris pas les détails, on doit finir par conclure que :

$$u_n = \frac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n\right).$$

7) Notons c le coefficient dominant de P. Les polynômes $(X^2 - 1)P''$, XP' et $-\lambda P$ sont tous trois de degré d, et leurs coefficients dominants respectifs sont $cd(d - 1)$, cd et $-c\lambda$. Le coefficient de X^d dans leur somme est donc $c(d^2 - \lambda)$. Mais cette somme est nulle, puisque P est solution de (E_λ). Comme c n'est pas nul, c'est donc que $\lambda = d^2$.

8) Si (E_λ) avait une solution polynomiale non nulle, d'après la question précédente, λ serait le carré de son degré, donc d'un entier. Par ailleurs il est clair que 0 est une solution de (E_λ). Celle-ci admet donc une et une seule solution polynomiale : la fonction polynomiale nulle.

9) a) Encore une utilisation immédiate de la question 7) : si δ est le degré d'une solution polynomiale non nulle, la question 7 assure que $\delta^2 = d^2$. S'agissant d'entiers positifs, on en déduit que $d = \delta$.

b) Vérifier que $P_1 - P_2$ est solution prend une ligne de calculs. Une fois qu'on l'a fait, on remarque que $P_1 - P_2$ est un polynôme de degré strictement inférieur à d (les monômes en X^d se compensent exactement dans la soustraction) donc par le a) il ne peut être que nul.

c) On dérive deux fois la formule $(**)$. On obtient :

$$\cos\alpha T_n'(\cos\alpha) - \sin^2\alpha T_n''(\cos\alpha) = n^2\cos(n\alpha)$$

qu'on peut réécrire :

$$\cos\alpha T_n'(\cos\alpha) - (1 - \cos^2\alpha)T_n''(\cos\alpha) - n^2 T_n(\alpha) = 0.$$

Dit autrement, tous les $\cos\alpha$ sont racines du polynôme $XT_n' + (X^2 - 1)T_n'' - n^2 T_n$. Celui-ci a donc une infinité de racines : il est donc nul.

d) Il est patent que les polynômes de la forme λT_n, λ variant dans $\mathbf{R}$ sont également solutions. Toute autre solution polynomiale doit avoir le même degré et le même coefficient dominant que l'un de ces polynômes, donc lui être égale par le b) : les λT_n sont donc toutes les solutions polynomiales.