Exercice 1

1) On trouve : $P' = 4X^3 - 6X^2 + 10X - 4$.

2) Après des calculs qui devraient figurer sur la copie, on trouve :

$$8P = (2X-1)P' + 14(X^2 - X + 2),$$

où on lit le reste $R = 14(X^2 - X + 2)$.

3) On constate que $P' = \left(\dfrac{2X-1}{7}\right) R$.

4) Soit α un complexe racine de R. Puisqu'il existe un B tel que $R = BP'$, $R(\alpha) = B(\alpha)P'(\alpha) = 0B(\alpha) = 0$. Puisqu'il existe un Q tel que $8P = QP' + R$, on a ensuite $8P(\alpha) = Q(\alpha)P'(\alpha) + R(\alpha) = 0Q(\alpha) + 0 = 0$, donc $P(\alpha) = 0$.

5) Le polynôme R a un discriminant strictement négatif et peut donc se factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ sous la forme $R = 14(X-\alpha)(X-\beta)$ où α et β sont deux complexes distincts (conjugués et qu'on saurait calculer, mais qu'importe). Vu la question précédente, tant α que β est racine de P et racine de P', donc racine multiple de P. On en déduit que tant $(X-\alpha)^2$ que $(X-\beta)^2$ divise P. Vu que ces deux polynômes sont premiers entre eux et vu que P a pour coefficient dominant 1, on en déduit que $P = (X-\alpha)^2(X-\beta)^2$ donc que $P = (X^2 - X + 2)^2$. Dans cette dernière écriture, le polynome $X^2 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ et on a donc bien fourni la décomposition en irréductibles de P.

Remarque : si on a peur de s'emmêler les pattes dans ce genre d'argumentation, on peut la faire de façon approchée et mal rédigée au brouillon ou dans sa tête, puis "constater" sur la copie que $(X^2-X+2)^2 = P$ où le polynôme $X^2 - X + 2$ est un irréductible de $\mathbf{R}[X]$ puisque du deuxième degré à discriminant strictement négatif. Le correcteur sera un peu frustré d'un tel court-circuit, mais ne pourra refuser de donner tous les points à la question.

Exercice 2

1) $B = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$.

2) Les racines du polynôme sont les solutions de l'équation $z^n = e^{i\beta}$ et sont donc les $e^{i\frac{\beta}{n} + ik\frac{2\pi}{n}}$ où k parcourt $\mathbf{Z}$. Si on fait courir k entre 0 et $n-1$ on obtient n nombres complexes distincts, donc le polynôme proposé a n racines, qui sont donc toutes simples, et sa factorisation s'obtient directement à partir de celles-ci :

$$C_\beta = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{\beta}{n} + ik\frac{2\pi}{n}}\right)$$

3) On remarque que $A = B(X^n)$, puis, au vu du 1) que $B(X^n) = (X^n - e^{i\alpha})(X^n - e^{-i\alpha}) = C_\alpha(X)C_{-\alpha}(X)$. On en déduit finalement que :

$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{\alpha}{n} + ik\frac{2\pi}{n}}\right) \prod_{l=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\frac{\alpha}{n} + il\frac{2\pi}{n}}\right).$$

(Ce n'est bien sûr pas la seule façon de fournir correctement la réponse à la question !).

4) On fait le changement d'indice $k = n - l$ si $l > 0$, $k = l$ si $l = 0$ dans le deuxième produit qui décrit A, ce qui permet de l'écrire sous la forme :

$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{\alpha}{n} + ik\frac{2\pi}{n}}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{-i\frac{\alpha}{n} - ik\frac{2\pi}{n}}\right)$$

qu'on peut alors regrouper en :

$$A = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + 1\right).$$

En appliquant avec un peu de soin l'hypothèse $\alpha \notin \pi\mathbf{Z}$, on se convainc que chacun des polynômes du deuxième degré du produit précédent n'a pas de racine réelle (je n'écris pas les détails, il faudrait qu'ils y soient sur une copie, je compte ne pas être trop sévère à la correction sur cette question plus délicate qu'elle en a l'air).

Exercice 3

1) En utilisant le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 4, on obtient :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24} + o(x^5) \qquad \text{quand } x \to 0.$$

2) On tronque le développement précédent à l'ordre 3, bien suffisant pour conclure, et on pousse celui de $\dfrac{1}{1-x}$ au même ordre. On obtient :

$$g(x) = \left(1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{quand } x \to 0.$$

et donc $g(x) \sim \dfrac{-x^3}{2}$ quand $x \to 0$.

3) On commence par écrire que $(\mathrm{Arctan}(2x))^m \sim 2^m x^m$ quand $x \to 0$. Dès lors, en faisant un quotient de cet équivalent par celui trouvé à la question précédente :

* si $m < 3$, la réponse est 0 ;
* si $m = 3$, la réponse est $-\frac{1}{16}$;
* si $m > 3$, la réponse est $-\infty$.

Exercice 4

On commence par manipuler :

$$\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{ch} x} = \frac{2 - x^2/2 + o(x^2)}{2 + x^2/2 + o(x^2)} = \frac{1 - x^2/4 + o(x^2)}{1 + x^2/4 + o(x^2)} = \left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{quand } x \to 0.$$

puis :

$$\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1+\operatorname{ch} x}\right) = \frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \to -\frac{1}{2} \qquad \text{quand } x \to 0.$$

Dans la mesure où $f(x)$ est l'exponentielle de l'expression qu'on vient d'étudier, on en conclut que :

$$f(x) \to e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \qquad \text{quand } x \to 0.$$

Exercice 5

1) et 2) Quand $n \to +\infty$, $1/n \to 0$. On peut donc écrire :

$$\ln(n+1) = \ln\left(n(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En perdant volontairement de l'information : $\ln(n+1) = \ln n + o(\ln n)$ ce qui traite le 1).

3) On réduit au même dénominateur $u_n = \dfrac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \ln(n+1)}$. Par la question 1) le dénominateur est équivalent à $(\ln n)^2$ tandis que par la question 2) le numérateur est équivalent à $1/n$. La suite proposée est donc équivalente à $1/n(\ln n)^2$ quand n tend vers l'infini.